

# Einführung in die Theoretische Informatik

Javier Esparza

CIT School  
TU München

Sommersemester 2021

© T. Nipkow / H. Seidl / J. Esparza / J. Křetínský

Version vom 21. April 2024

# Kapitel I Organisatorisches

Siehe <https://www.cs.cit.tum.de/tcs/lehre/sommersemester-2024/theo/>

## Vorkenntnisse und weiterführende Vorlesungen

- Vorkenntnisse:
  - IN0001 Einführung in die Informatik
  - IN0015 Diskrete Strukturen
- Weiterführende Vorlesungen:
  - Automaten und formale Sprachen
  - Komplexitätstheorie
  - Logik
  - Model Checking
  - Compilerbau
  - ...

# Inhalt und Gliederung der Vorlesung

## Formale Sprachen

- Endliche Automaten und reguläre Ausdrücke
  - Grundlagen der Textanalyse, der lexikalischen Analyse von Programmiersprachen, und der Spezifikation und Analyse von Kommunikationsprotokollen.
- Kontextfreie Grammatiken
  - Grundlagen der syntaktischen Analyse von Programmiersprachen, Parsing, Compilerbau.

## Berechenbarkeit und Komplexität

- Theorie der Berechenbarkeit
  - Untersuchung der Grenzen, was Rechner prinzipiell können.
- Komplexitätstheorie
  - Untersuchung der Grenzen, was Rechner mit begrenzten Ressourcen können.

## Literatur

-  John E. Hopcroft, Rajeev Motwani, Jeffrey D. Ullman.  
*Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation.*
-  Michael Sipser.  
*Introduction to the Theory of Computation.*
-  Dexter Kozen.  
*Automata and Computability.*
-  Katrin Erk, Lutz Priese.  
*Theoretische Informatik: Eine umfassende Einführung.*
-  Uwe Schöning.  
*Theoretische Informatik — kurzgefasst.*
-  Javier Esparza and Michael Blondin.  
*Automata Theory – An Algorithmic Approach.*

# Kapitel II Formale Sprachen

## 1. Einleitung: Kommunikation mit Rechnern



**Abbildung:** Rechenmaschinen für arithmetische Operationen, XVII-XX Jh.  
(Addition, Substraktion, Multiplikation, Division)  
(By Ezrdr (Own work), via Wikipedia)



**Abbildung:** Gezeitenrechenmaschine im Deutschen Museum, gebaut 1935-39. (Quelle: Deutsches Museum)

Für die Berechnung von Funktionen der Gestalt  $f(t) = \sum_{i=1}^{34} a_i \cos w_i t$

# ON COMPUTABLE NUMBERS, WITH AN APPLICATION TO THE ENTSCHIEDUNGSPROBLEM

*By* A. M. TURING.

[Received 28 May, 1936.—Read 12 November, 1936.]

## 6. *The universal computing machine.*

It is possible to invent a single machine which can be used to compute any computable sequence. If this machine  $\mathcal{U}$  is supplied with a tape on

**Abbildung:** Alan Turings Artikel (1936), in dem er eine (abstrakte) universelle Rechenmaschine beschreibt

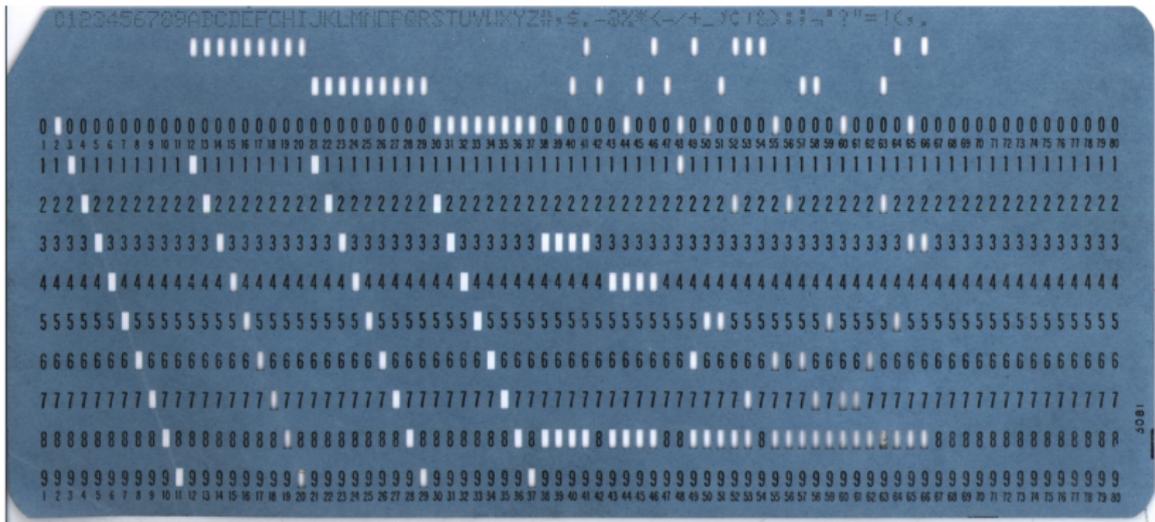


Abbildung: Programmieren mit Lochkarten in den 1960er Jahre

- In den 1950er setzt sich die Idee durch,  
**Programmiersprachen**  
für die Kommunikation mit Maschinen zu entwickeln.
- Gleichzeitig entwickelt der Linguist Noam Chomsky eine neue Theorie (**Transformationgrammatik**) der natürlichen Sprachen, mit dem Ziel, die Mechanismen zu erklären, die Menschen verwenden, um Sätze zu bauen.

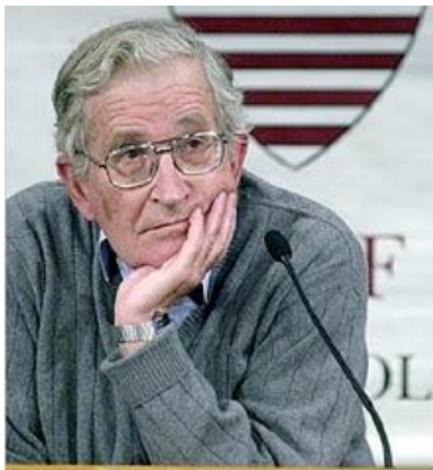


**Noam Chomsky.**

*Three Models for the Description of Language.*

Transactions on Information Theory, 113-124, 1956.

- Sein Begriff der **formalen Grammatiken** wird 1960 von dem ALGOL 60 Komitee übernommen (ALGOL = ALGOritmic Language)
- Seitdem wird die Syntax von Programmiersprachen durch formale Grammatiken beschrieben.



Noam Chomsky (1928 - ) ist emeritierter Professor für Linguistik am Massachusetts Institute of Technology (MIT) und gehört zu den bekanntesten Linguisten der Gegenwart.

Er übte durch die Verbindung der Wissenschaftsdisziplinen Linguistik, Kognitionswissenschaften und Informatik besonders in der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts starken Einfluss auf deren Entwicklung aus.

Chomsky war außerdem ab den 1960er- und 1970er-Jahren oft im politischen und wissenschaftlichen Diskurs in den Massenmedien präsent.

[Quelle: Wikipedia, 14.04.2024]

- Beispiele von Regeln für den Bau von Sätzen:

Satz → Nominalphrase Verbalphrase  
Verbalphrase → Verb Nominalphrase  
Nominalphrase → Artikel Nomen  
Satz → Präpositionalphrase Verbalphrase

- Beispiele von Regeln für den Bau von Programmen:

keyword\_item → identifier "=" expression  
identifier → letter identifier2  
identifier2 → letter identifier2  
identifier2 → " "

- Das **Erkennungsproblem**: Ist eine gegebene Zeichenkette ein Programm, d.h. kann sie von den Regeln erzeugt werden?
- **Recognizer**: Programm, welches das Erkennungsproblem für eine gegebene Grammatik löst.  
Recognizer → Parser → Compiler
- **Hauptfragen**:
  - Für welche Grammatiken gibt es effiziente Recognizer?
  - Gegeben eine Grammatik, wie kann ein Recognizer automatisch konstruiert werden?

## 2. Grundbegriffe

### Definition 2.1

- Ein **Alphabet**  $\Sigma$  ist eine endliche Menge.  
Bsp:  $\{0, 1\}$ , ASCII, Unicode.
- Ein **Wort**/String über  $\Sigma$  ist eine endliche Folge von Zeichen aus  $\Sigma$ , zB 010.
- $|w|$  bezeichnet die Länge eines Wortes  $w$ .
- Das **leere Wort** (das einzige Wort der Länge 0) wird mit  $\epsilon$  bezeichnet.
- Sind  $u$  und  $v$  Wörter, so ist  $uv$  ihre Konkatenation.
- Ist  $w$  ein Wort, so ist  $w^n$  definiert durch  $w^0 = \epsilon$  und  $w^{n+1} = ww^n$ . Bsp:  $(ab)^3 = ababab$ .
- $\Sigma^*$  ist die Menge aller Wörter über  $\Sigma$ .
- Eine Teilmenge  $L \subseteq \Sigma^*$  ist eine **(formale) Sprache**.

## Beispiel 2.2 (Formale Sprachen)

- Die Menge aller Wörter im Duden (24. Aufl.)
- Die Menge der deutschen Sätze ist keine formale Sprache
- $L_1 = \{\epsilon, ab, abab, ababab, \dots\} = \{(ab)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$   
( $\Sigma_1 = \{a, b\}$ )
- $L_2 = \{\epsilon, ab, aabb, aaabbb, \dots\} = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$   
( $\Sigma_2 = \{a, b\}$ )
- $L_3 = \{\epsilon, 1, 100, 1001, 10000, \dots\} =$   
 $\{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ ist eine binär kodierte Quadratzahl}\}$   
( $\Sigma_3 = \{0, 1\}$ )
- $\emptyset$
- $\{\epsilon\}$
- $\epsilon$  oder  $ab$  sind keine Sprachen

## Definition 2.3 (Operationen auf Sprachen)

Seien  $A, B \subseteq \Sigma^*$ .

- Konkatination:  $AB = \{uv \mid u \in A \wedge v \in B\}$   
Bsp:  $\{ab, b\}\{a, bb\} = \{aba, abbb, ba, bbb\}$   
NB:  $\{ab, b\} \times \{a, bb\} = \{(ab, a), (ab, bb), (b, a), (b, bb)\}$
- $A^n = \{w_1 \dots w_n \mid w_1, \dots, w_n \in A\} = \underbrace{A \dots A}_n$   
Bsp:  $\{ab, ba\}^2 = \{abab, abba, baab, baba\}$   
Rekursiv:  $A^0 = \{\epsilon\}$  und  $A^{n+1} = AA^n$
- $A^* = \{w_1 \dots w_n \mid n \geq 0 \wedge w_1, \dots, w_n \in A\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A^n$   
Bsp:  $\{01\}^* = \{\epsilon, 01, 0101, 010101, \dots\} \neq \{0, 1\}^*$
- $A^+ = AA^* = \bigcup_{n \geq 1} A^n$   
Bsp:  $\Sigma^+ =$  Menge aller nicht-leeren Wörter über  $\Sigma$

### Achtung:

- Für alle  $A$ :  $\epsilon \in A^*$
- $\emptyset^* = \{\epsilon\}$

Einige Rechenregeln:

### Lemma 2.4

- $\emptyset A = \emptyset$
- $\{\epsilon\}A = A$

### Lemma 2.5

- $A(B \cup C) = AB \cup AC$
- $(A \cup B)C = AC \cup BC$

**Achtung:** i.A. gilt  $A(B \cap C) = AB \cap AC$  *nicht*.

### Lemma 2.6

$$A^*A^* = A^*$$

## 2.1 Grammatiken

### Definition 2.7

Eine **Grammatik** ist ein 4-Tupel  $G = (V, \Sigma, P, S)$ , wobei

$V$  ist eine endliche Menge von **Nichtterminalzeichen** (oder **Nichtterminale**, oder **Variablen**),

$\Sigma$  ist eine endliche Menge von **Terminalzeichen** (oder **Terminale**),  
disjunkt von  $V$ , auch genannt ein **Alphabet**,

$P \subseteq (V \cup \Sigma)^* \times (V \cup \Sigma)^*$  ist eine Menge von **Produktionen**, und

$S \in V$  ist das **Startsymbol**.

Konventionen:

- $A, B, C, \dots$  sind Nichtterminale,
- $a, b, c, \dots$  (und Sonderzeichen wie  $+, *, \dots$ ) sind Terminale,
- $\alpha, \beta, \gamma, \dots \in (V \cup \Sigma)^*$
- Produktionen schreiben wir  $\alpha \rightarrow \beta$  statt  $(\alpha, \beta) \in P$ .
- Statt  $\alpha \rightarrow \beta_1, \dots, \alpha \rightarrow \beta_n$  schreiben wir  $\alpha \rightarrow \beta_1 \mid \dots \mid \beta_n$

## Beispiel 2.8 (Arithmetische Ausdrücke)

- $V = \{\langle \text{Expr} \rangle, \langle \text{Term} \rangle, \langle \text{Factor} \rangle\}$
- $\Sigma = \{a, b, c, +, *, (, )\}$
- $S = \langle \text{Expr} \rangle$
- Die Menge  $P$  enthält folgende Produktionen:

$$\begin{aligned}\langle \text{Expr} \rangle &\rightarrow \langle \text{Term} \rangle \\ \langle \text{Expr} \rangle &\rightarrow \langle \text{Expr} \rangle + \langle \text{Term} \rangle \\ \langle \text{Term} \rangle &\rightarrow \langle \text{Factor} \rangle \\ \langle \text{Term} \rangle &\rightarrow \langle \text{Term} \rangle * \langle \text{Factor} \rangle \\ \langle \text{Factor} \rangle &\rightarrow a \mid b \mid c \\ \langle \text{Factor} \rangle &\rightarrow (\langle \text{Expr} \rangle)\end{aligned}$$

## Definition 2.9

Eine Grammatik  $G = (V, \Sigma, P, S)$  induziert eine **Ableitungsrelation**  $\rightarrow_G$  auf Wörtern über  $V \cup \Sigma$ :

$$\alpha \rightarrow_G \alpha'$$

gdw es eine Regel  $\beta \rightarrow \beta'$  in  $P$  und Wörter  $\alpha_1, \alpha_2$  gibt, so dass

$$\alpha = \alpha_1 \beta \alpha_2 \quad \text{und} \quad \alpha' = \alpha_1 \beta' \alpha_2$$

Beispiel : Für die Grammatik der arithmetischen Ausdrücken gilt

$$a + \langle \text{Term} \rangle + b \quad \rightarrow_G \quad a + \langle \text{Term} \rangle * \langle \text{Factor} \rangle + b$$

Eine Sequenz  $\alpha_1 \rightarrow_G \alpha_2 \rightarrow_G \cdots \rightarrow_G \alpha_n$  ist eine **Ableitung** von  $\alpha_n$  aus  $\alpha_1$ .

Wenn  $\alpha_1 = S$  und  $\alpha_n \in \Sigma^*$ , dann **erzeugt**  $G$  das Wort  $\alpha_n$ .

Die **Sprache** von  $G$  ist die Menge aller Wörter, die von  $G$  erzeugt werden. Sie wird mit  $L(G)$  bezeichnet.

## Beispiel 2.10 (Arithmetische Ausdrücke)

$$\begin{aligned}\langle \text{Expr} \rangle &\rightarrow \langle \text{Term} \rangle \\ \langle \text{Expr} \rangle &\rightarrow \langle \text{Expr} \rangle + \langle \text{Term} \rangle \\ \langle \text{Term} \rangle &\rightarrow \langle \text{Factor} \rangle \\ \langle \text{Term} \rangle &\rightarrow \langle \text{Term} \rangle * \langle \text{Factor} \rangle \\ \langle \text{Factor} \rangle &\rightarrow a \mid b \mid c \\ \langle \text{Factor} \rangle &\rightarrow (\langle \text{Expr} \rangle)\end{aligned}$$

Das Startsymbol ist  $\langle \text{Expr} \rangle$ .

Eine Ableitung von  $a * (b + c)$  :

$$\langle \text{Expr} \rangle \rightarrow$$

$$\rightarrow a * (b + c)$$

## Beispiel 2.11

Welche Grammatik erzeugt  $L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$  ?

$$\begin{array}{ll} G_1 : & S \rightarrow abcS \mid \epsilon \\ & ba \rightarrow ab \\ & cb \rightarrow bc \\ & ca \rightarrow ac \end{array} \qquad \begin{array}{ll} G_2 : & S \rightarrow aBSc \mid \epsilon \\ & Ba \rightarrow aB \\ & Bb \rightarrow bB \\ & Bc \rightarrow bc \end{array}$$

Es gilt  $L(G_1) \neq L$  weil  $S \rightarrow abcS \rightarrow abcabcS \rightarrow abcabc$

Aber  $L \subseteq L(G_1)$ . Ableitung von  $aabbcc$  aus  $S$ :

$S \rightarrow abcS \rightarrow abcabcS \rightarrow abcabc \rightarrow abacbc \rightarrow aabc bc \rightarrow aabbcc$

Es gilt:  $L(G_2) = L$ . Ableitung von  $aabbcc$  aus  $S$ :

$S \rightarrow aBSc \rightarrow aBaBSc \rightarrow aBaBcc \rightarrow aaBBcc \rightarrow aaBbcc \rightarrow aabBcc \rightarrow aabbcc$

## Definition 2.12 (Reflexive transitive Hülle)

$$\alpha \rightarrow_G^0 \alpha$$

$$\alpha \rightarrow_G^{n+1} \gamma \quad :\Leftrightarrow \quad \exists \beta. \alpha \rightarrow_G^n \beta \rightarrow_G \gamma$$

$$\alpha \rightarrow_G^* \beta \quad :\Leftrightarrow \quad \exists n. \alpha \rightarrow_G^n \beta$$

$$\alpha \rightarrow_G^+ \beta \quad :\Leftrightarrow \quad \exists n > 0. \alpha \rightarrow_G^n \beta$$

Beispiel:  $\langle \text{Expr} \rangle \rightarrow_G^{11} a * (b + c)$  und so  $\langle \text{Expr} \rangle \rightarrow_G^* a * (b + c)$ .

Es gilt:  $L(G) = \{w \in \Sigma^* \mid S \rightarrow_G^* w\}$

## 2.2 Die Chomsky-Hierarchie

Eine Grammatik  $G$  ist vom

Typ 0 immer.

Typ 1 falls jede Produktion  $\alpha \rightarrow \beta$  außer  $S \rightarrow \epsilon$   
 $|\alpha| \leq |\beta|$  gilt  
und, wenn  $S \rightarrow \epsilon$  eine Produktion ist,  
dann kommt  $S$  in  $\beta$  nicht vor

Typ 2 falls  $G$  vom Typ 1 ist und  
für jede Produktion  $\alpha \rightarrow \beta$  gilt  $\alpha \in V$ .

Typ 3 falls  $G$  vom Typ 2 ist und  
für jede Produktion  $\alpha \rightarrow \beta$  außer  $S \rightarrow \epsilon$   
gilt  $\beta \in \Sigma \cup \Sigma V$ .

Offensichtlich gilt:

$$\text{Typ 3} \subset \text{Typ 2} \subset \text{Typ 1} \subset \text{Typ 0}$$

## Grammatiken und Sprachklassen:

Typ 3	Rechtslineare Grammatik	Reguläre Sprachen
Typ 2	Kontextfreie Grammatik	Kontextfreie Sprachen
Typ 1	Kontextsensitive Grammatik	Kontextsens. Sprachen
Typ 0	Phrasenstrukturgrammatik	Rekursiv aufzählbare Sprachen

### Satz 2.13

$$L(\text{Typ } 3) \subset L(\text{Typ } 2) \subset L(\text{Typ } 1) \subset L(\text{Typ } 0)$$

**Bemerkung** Wir benutzen später eine etwas liberalere Definition von kontextfreien Grammatiken, die aber die gleiche Klasse von kontextfreien Sprachen erzeugt.

Das **Wortproblem**:

*Gegeben: eine Grammatik  $G$ , ein Wort  $w \in \Sigma^*$*

*Frage: Gilt  $w \in L(G)$  ?*

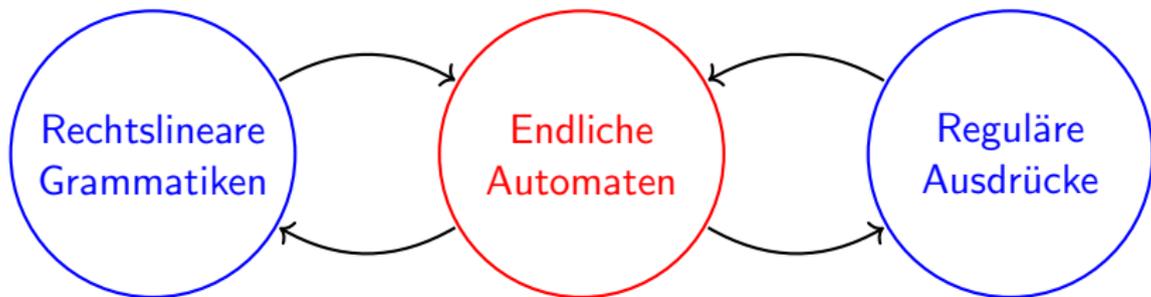
In den kommenden Wochen untersuchen wir das Wortproblem für Grammatiken vom Typ 3 und Typ 2.

Wir studieren Algorithmen, die für eine gegebene Grammatik  $G$  einen **Automaten**  $A_G$  konstruieren, und untersuchen ihre Laufzeit.

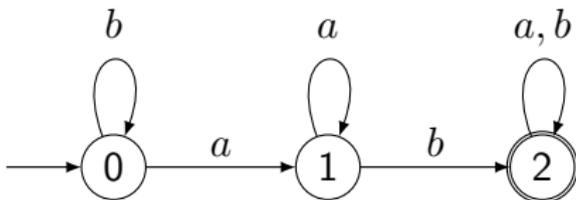
$A_G$  ist eine abstrakte Beschreibung eines Programms zur Lösung des Wortproblems.

Der Algorithmus mit  $G$  als Eingabe und  $A_G$  als Ausgabe ist eine abstrakte Beschreibung eines Programms für die automatische Synthese von Recognizern (lex, yacc).

### 3. Reguläre Sprachen



### 3.1 Deterministische endliche Automaten



Eingabewort  $baba \rightsquigarrow$  Zustandsfolge 0,0,1,2,2.

Erkannte Sprache: Menge der Wörter, die vom Startzustand in einen Endzustand führen.

Recognizer, die nur einmal das Wort durchläuft und in linearer Zeit es akzeptiert oder ablehnt.

### Definition 3.1

Ein **deterministischer endlicher Automat** (*deterministic finite automaton*, DFA)  $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$  besteht aus

- einer endlichen Menge von **Zuständen**  $Q$ ,
- einem (endlichen) **Eingabealphabet**  $\Sigma$ ,
- einer (totalen!) **Übergangsfunktion**  $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$ ,
- einem **Startzustand**  $q_0 \in Q$ , und
- einer Menge  $F \subseteq Q$  von **Endzuständen** (**akzeptierenden Zust.**)

## Definition 3.2

Die von  $M$  akzeptierte Sprache ist

$$L(M) := \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_0, w) \in F\},$$

wobei  $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \rightarrow Q$  induktiv definiert ist durch

$$\begin{aligned}\hat{\delta}(q, \epsilon) &= q \\ \hat{\delta}(q, aw) &= \hat{\delta}(\delta(q, a), w) \quad \text{für } a \in \Sigma, w \in \Sigma^* .\end{aligned}$$

(  $\hat{\delta}(q, w)$  bezeichnet den Zustand, den man aus  $q$  mit  $w$  erreicht. )

Eine Sprache ist regulär gdw sie von einem DFA akzeptiert wird.

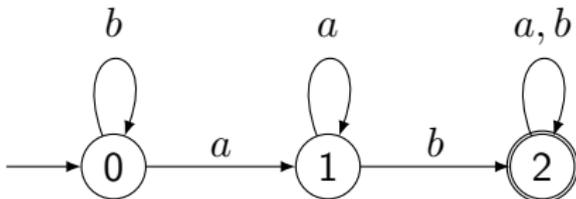
Eigenschaften von  $\hat{\delta}$ :

- $\hat{\delta}(q, a) = \delta(q, a)$ .
- $\hat{\delta}(q, wa) = \delta(\hat{\delta}(q, w), a)$ .

## Graphische Darstellung

- Endliche Automaten können durch gerichtete und markierte **Zustandsgraphen** veranschaulicht werden:
  - Knoten  $\hat{=}$  Zuständen
  - Kanten  $\hat{=}$  Übergängen:  $p \xrightarrow{a} q \hat{=} \delta(p, a) = q$
- Der Anfangszustand wird durch einen Pfeil, Endzustände werden durch doppelte Kreise gekennzeichnet.

## Beispiel 3.3



Die Sprache des DFAs ist die Menge aller Wörter über  $\{a, b\}$ , die  $ab$  enthalten.

- Jedes Wort, das akzeptiert wird, enthält  $ab$ .

Sei  $w$  ein Wort, welches akzeptiert wird.

Betrachte in der Zustandsfolge für  $w$  den Zeitpunkt, in dem Zustand 1 zum letzten Mal besucht wird (existiert weil die Folge in Zustand 2 endet).

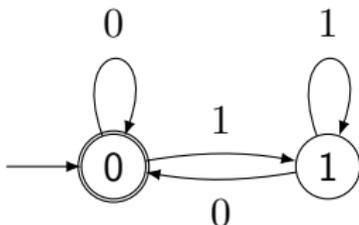
Unmittelbar davor wird  $a$  gelesen und unmittelbar danach  $b$ .

- Jedes Wort, das  $ab$  enthält, wird akzeptiert.

Für alle  $q \in \{0, 1, 2\}$  gilt:  $\hat{\delta}(q, ab) = 2$  und Zustand 2 kann nicht verlassen werden.

### Beispiel 3.4

Für  $w \in \{0, 1\}^*$  sei  $\#w$  die von  $w$  binär repräsentierte Zahl, zB  $\#100 = 4$ .



Der DFA akzeptiert genau die  $w \in \{0, 1\}^*$  so dass  $\#w$  gerade ist.

#### Beweis:

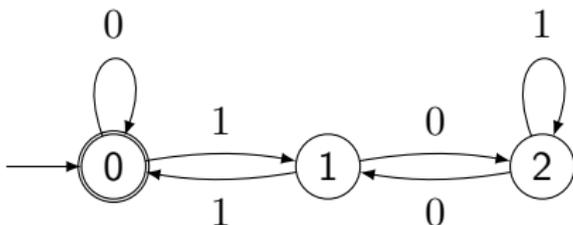
Für alle  $w \neq \epsilon$ ,  $\#w$  ist gerade gdw  $w$  endet mit 0.

1.  $\hat{\delta}(0, w0) = \delta(\hat{\delta}(0, w), 0) = 0 \in F$ , daher  $w0 \in L(A)$

2.  $\hat{\delta}(0, w1) = \delta(\hat{\delta}(0, w), 1) = 1 \notin F$ , daher  $w1 \notin L(A)$

Für  $w = \epsilon$ ,  $\hat{\delta}(0, w) = 0$ , daher  $\epsilon \in L(A)$  und  $\#\epsilon = 0$ . □

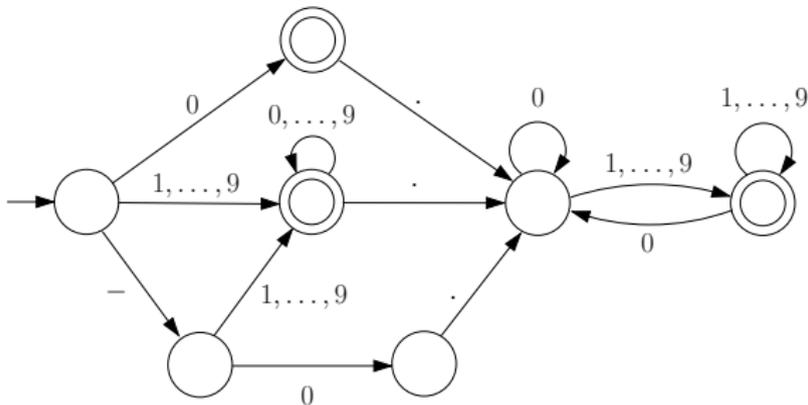
### Beispiel 3.5



Für  $w \in \{0, 1\}^*$  sei  $\#w$  die von  $w$  binär repräsentierte Zahl, zB  $\#100 = 4$ .

Der DFA akzeptiert genau die Wörter  $w \in \{0, 1\}^*$  mit:  $\#w$  ist ein vielfaches von 3.

## Beispiel 3.6



Ein DFA für die Gleitkommazahlen

### 3.2 Von rechtslinearen Grammatiken zu DFA (und zurück)

Rechtslineare Grammatik: Produktionen der Gestalt  $A \rightarrow a$  und  $A \rightarrow aB$

Wir zeigen:

- Für jede rechtslineare Grammatik  $G$  gibt es einen DFA  $M$  mit  $L(M) = L(G)$ .
- Für jeden DFA  $M$  gibt es eine rechtslineare Grammatik  $G$  mit  $L(G) = L(M)$ .

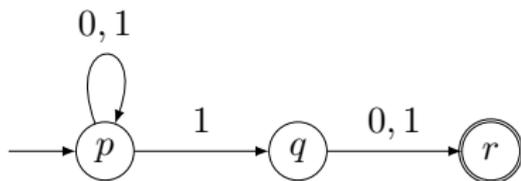
Wir führen **nichtdeterministische endliche Automaten** (NFA) als "Zwischenschritt" ein. Wir zeigen:

- Für jede rechtslineare Grammatik  $G$  gibt es einen NFA  $N$  mit  $L(N) = L(G)$ .
- Für jeden NFA  $N$  gibt es einen DFA  $M$  mit  $L(M) = L(N)$ .
- Für jeden DFA  $M$  gibt es eine rechtslineare Grammatik  $G$  mit  $L(G) = L(M)$ .

NFA sind eine Verallgemeinerung von DFA: Aus einem Zustand kann es 0, 1, 2, ... Übergänge mit derselben Beschriftung geben.

### Beispiel 3.7

Erkennung der Binärzahlen, deren vorletzte Ziffer 1 ist:



Eingabewort 0111  $\rightsquigarrow$  Mehrere Zustandsfolgen:

$p, p, p, p, p$        $p, p, p, p, q$        $p, p, p, q, r$

Wort wird akzeptiert gdw mindestens eine dieser Zustandsfolgen zu einem Endzustand führt.

Intuitive Vorstellung: Der Automat "rät" den richtigen Weg.

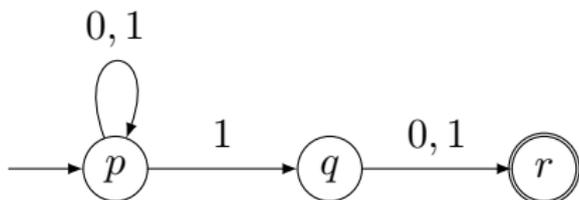
NFA nicht nützlich als Recognizer, aber als Zwischenschritt oder Datenstruktur.

### Definition 3.8

Ein **nichtdeterministischer endlicher Automat** (*nondeterministic finite automaton*, NFA) ist ein 5-Tupel  $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ , so dass

- $Q, \Sigma, q_0$  und  $F$  sind wie bei einem DFA
- $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow \mathcal{P}(Q)$   
 $\mathcal{P}(Q)$  = Menge aller Teilmengen von  $Q = 2^Q$ .  
Alternative: Relation  $\delta \subseteq Q \times \Sigma \times Q$ .

### Beispiel



$\delta$	0	1
$p$	$\{p\}$	$\{p, q\}$
$q$	$\{r\}$	$\{r\}$
$r$	$\emptyset$	$\emptyset$

Erweiterung von  $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow \mathcal{P}(Q)$   
auf  $\bar{\delta} : \mathcal{P}(Q) \times \Sigma \rightarrow \mathcal{P}(Q)$  definiert durch

$$\bar{\delta}(S, a) := \bigcup_{q \in S} \delta(q, a)$$

Es folgt:  $\hat{\delta} : \mathcal{P}(Q) \times \Sigma^* \rightarrow \mathcal{P}(Q)$

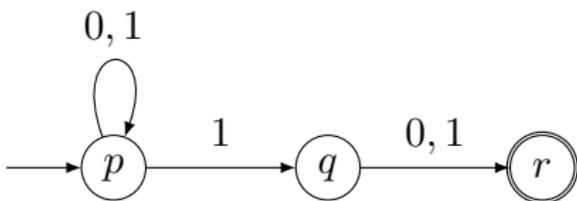
Intuition:  $\hat{\delta}(S, w)$  ist Menge aller Zustände die sich von einem Zustand in  $S$  aus mit  $w$  erreichen lassen.

Die von  $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$  **akzeptierte** Sprache ist

$$L(N) := \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(\{q_0\}, w) \cap F \neq \emptyset\}$$

Oft schreiben wir nur  $\delta$  statt  $\bar{\delta}$  und  $\hat{\delta}$  statt  $\hat{\delta}$   
(vgl. overloading in Programmiersprachen).

## Beispiel



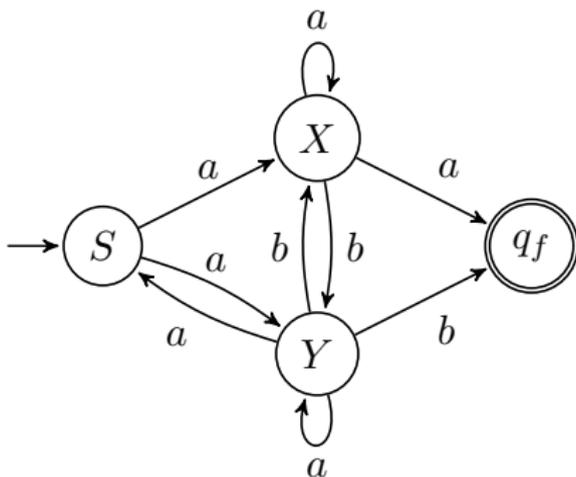
$$\begin{aligned} & \hat{\delta}(\{p, q\}, 10) \\ = & \hat{\delta}(\bar{\delta}(\{p, q\}, 1), 0) \\ = & \hat{\delta}(\delta(p, 1) \cup \delta(q, 1), 0) \\ = & \hat{\delta}(\{p, q, r\}, 0) \\ = & \bar{\delta}(\{p, q, r\}, 0) \\ = & \delta(p, 0) \cup \delta(q, 0) \cup \delta(r, 0) \\ = & \{p\} \cup \{r\} \cup \emptyset = \{p, r\} \end{aligned}$$

### Satz 3.9

Für jede rechtslineare Grammatik  $G$  gibt es einen NFA  $M$  mit  $L(G) = L(M)$ .

### Beispiel

$S \rightarrow aX \mid aY$     $X \rightarrow aX \mid bY \mid a$     $Y \rightarrow aS \mid bX \mid aY \mid b$



Aufgabe: Und wenn  $S \rightarrow aX \mid aY \mid \epsilon$ ?

## Beweis:

Sei  $G = (V, \Sigma, P, S)$  eine rechtslineare Grammatik ohne die Produktion  $S \rightarrow \epsilon$ . Definiere den NFA  $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$  mit

- $Q = V \cup \{q_f\}$  (wobei  $q_f \notin V$ )
- $Y \in \delta(X, a)$  gdw  $(X \rightarrow aY) \in P$
- $q_f \in \delta(X, a)$  gdw  $(X \rightarrow a) \in P$
- $q_0 = S$
- $F = \{q_f\}$

Es gilt (Induktion über  $n$ ):

$$S \rightarrow a_1 X_1 \rightarrow_G a_1 a_2 X_2 \rightarrow_G \cdots \rightarrow_G a_1 \dots a_{n-1} X_{n-1} \rightarrow_G a_1 \dots a_n$$

ist eine Ableitung von  $G$  gdw

$$q_f \in \delta(S, a_1 \dots a_n) .$$

Damit gilt  $L(G) = L(A)$ . (Fall mit  $S \rightarrow \epsilon$ : Aufgabe)



Lösung der Aufgabe: Wenn die Grammatik die Produktion  $S \rightarrow \epsilon$  enthält, dann setze  $F = \{S, q_f\}$ .

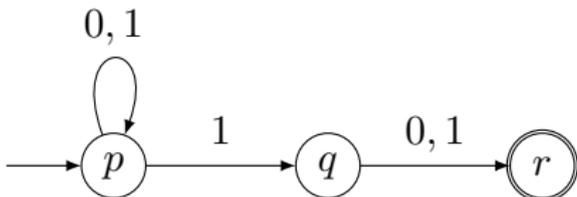
**Aufgabe:** Sei  $G = (V, T, P, S)$  eine rechtslineare Grammatik, die die Produktion  $S \rightarrow \epsilon$  nicht enthält. Definiere die Grammatik  $G' = (V, T, P \cup \{S \rightarrow \epsilon\}, S)$  (d.h., wir fügen  $S \rightarrow \epsilon$  zu  $P$  hinzu).

- Gilt immer  $L(G') = L(G) \cup \{\epsilon\}$  ?
- Geben Sie eine Grammatik  $G''$  mit  $L(G'') = L(G) \cup \{\epsilon\}$  an.

### Satz 3.10

Für jeden NFA  $N$  gibt es einen DFA  $M$  mit  $L(N) = L(M)$ .

### Beispiel



## Beweis:

Sei  $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$  ein NFA.

Definiere den DFA  $M = (\mathcal{P}(Q), \Sigma, \hat{\delta}, \{q_0\}, F_M)$ :

$$F_M := \{S \subseteq Q \mid S \cap F \neq \emptyset\}$$

Dann gilt:

$$w \in L(N) \Leftrightarrow \hat{\delta}(\{q_0\}, w) \cap F \neq \emptyset \quad \text{Def.}$$

$$\Leftrightarrow \hat{\delta}(\{q_0\}, w) \in F_M \quad \text{Def.}$$

$$\Leftrightarrow w \in L(M) \quad \text{Def.} \quad \square$$

Dies nennt man die **Potenzmengen-** oder **Teilmengenkonstruktion**.

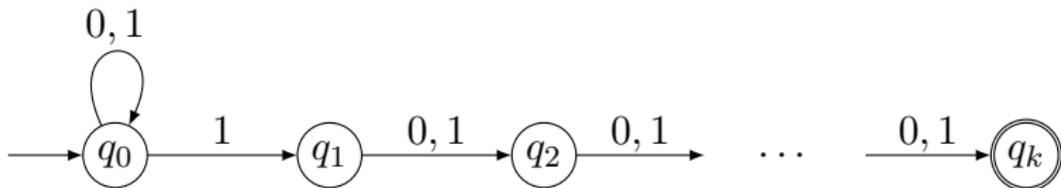
In der Praxis werden nur die aus  $q_0$  erreichbaren Zustände konstruiert.

Trotzdem: Für einen NFA mit  $n$  Zuständen kann der entsprechende DFA bis zu  $2^n$  Zustände haben.

## Beispiel 3.11

$$L_k := \{w \in \{0, 1\}^* \mid \text{das } k\text{-letzte Bit von } w \text{ ist } 1\}$$

Ein NFA für diese Sprache:



Die Potenzmengenkonstruktion liefert einen DFA für  $L_k$  mit  $2^k$  Zuständen. Geht es kompakter?

### Lemma 3.12

Jeder DFA  $M$  mit  $L(M) = L_k$  hat mindestens  $2^k$  Zuständen.

Im *schlimmsten* Fall ist ein exponentieller Sprung unvermeidlich.

## Beweis:

Indirekt. Sei  $M$  ein DFA mit  $< 2^k$  Zuständen, so dass  $L(M) = L_k$ .

- Zuerst zeigen wir für alle  $w_1, w_2 \in \{0, 1\}^k$ :  
wenn  $w_1 \neq w_2$  dann  $\hat{\delta}(q_0, w_1) \neq \hat{\delta}(q_0, w_2)$ .  
Annahme: Es gibt  $w_1, w_2 \in \{0, 1\}^k$  mit  $w_1 \neq w_2$  aber  
 $\hat{\delta}(q_0, w_1) = \hat{\delta}(q_0, w_2)$ . Wir leiten einen Widerspruch ab:
- Sei  $w_1 = wa_i \dots a_k$  und  $w_2 = wb_i \dots b_k$  mit  $a_i \neq b_i$   
OE sei  $a_i = 1, b_i = 0$ .  
Es gilt einerseits:  $w_1 0^{i-1} = wa_i \dots a_k 0^{i-1} \in L_k$   
 $w_2 0^{i-1} = wb_i \dots b_k 0^{i-1} \notin L_k$   
Aber es gilt auch:  $\hat{\delta}(q_0, w_1 0^{i-1}) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q_0, w_1), 0^{i-1}) =$   
 $\hat{\delta}(\hat{\delta}(q_0, w_2), 0^{i-1}) = \hat{\delta}(q_0, w_2 0^{i-1}) \quad \color{red}{\nabla}$
- Es folgt:  $M$  hat mindestens  $2^k$  Zustände.



### Satz 3.13

Für jeden DFA  $M$  gibt es eine rechtslineare Grammatik  $G$  mit  $L(M) = L(G)$ .

#### Beweis:

Sei  $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ . Die Grammatik  $G = (V, T, P, S)$  mit

- $V = Q, T = \Sigma, S = q_0,$
- $(q_1 \rightarrow aq_2) \in P$  gdw  $\delta(q_1, a) = q_2,$
- $(q_1 \rightarrow a) \in P$  gdw  $\delta(q_1, a) \in F,$  und
- $(q_0 \rightarrow \epsilon) \in P$  gdw  $q_0 \in F,$

ist von Typ 3 und erfüllt  $L(M) = L(G)$ . □

### 3.3 NFAs mit $\epsilon$ -Übergängen

Grammatiken von Programmiersprachen enthalten viele Produktionen der Gestalt  $A \rightarrow B$ .

#### Beispiel 3.14

Ein kleines Fragment der Grammatik von Java:

Literal:

```
IntegerLiteral  
FloatingPointLiteral  
CharacterLiteral  
StringLiteral  
BooleanLiteral  
NullLiteral
```

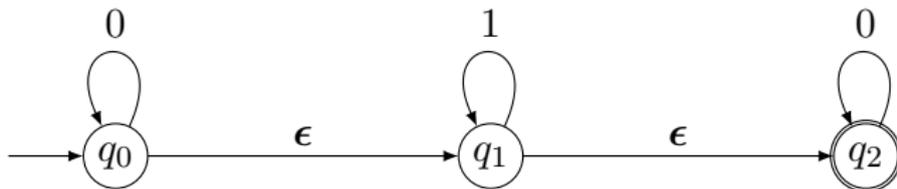
Wir suchen Recognizer für Typ 3 Grammatiken, die auch solche Produktionen enthalten.

### Definition 3.15

Ein NFA mit  $\epsilon$ -Übergängen (auch  $\epsilon$ -NFA) ist ein NFA mit einem speziellen Symbol  $\epsilon \notin \Sigma$  und mit

$$\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \rightarrow \mathcal{P}(Q) .$$

Ein  $\epsilon$ -Übergang darf ausgeführt werden, ohne dass ein Eingabezeichen gelesen wird.



Akzeptiert:  $\epsilon$ , 00, 11, ...      Nicht akzeptiert: 101, ...

Bemerkung:  $\epsilon \neq \epsilon$ ;  $\epsilon$  ist ein einzelnes Symbol,  $\epsilon$  das leere Wort.

### Lemma 3.16

Für jeden  $\epsilon$ -NFA  $N$  gibt es einen NFA  $N'$  mit  $L(N) = L(N')$ .

#### Beweis:

Sei  $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$  ein  $\epsilon$ -NFA. Wir definieren den NFA  $N' = (Q, \Sigma, \delta', q_0, F')$  mit folgenden Definitionen für  $\delta'$  und  $F'$ :

- $\delta' : Q \times \Sigma \rightarrow \mathcal{P}(Q)$

$$\delta'(q, a) := \bigcup_{i \geq 0, j \geq 0} \hat{\delta}(\{q\}, \epsilon^i a \epsilon^j).$$

- Falls  $N$  das leere Wort  $\epsilon$  akzeptiert, also falls

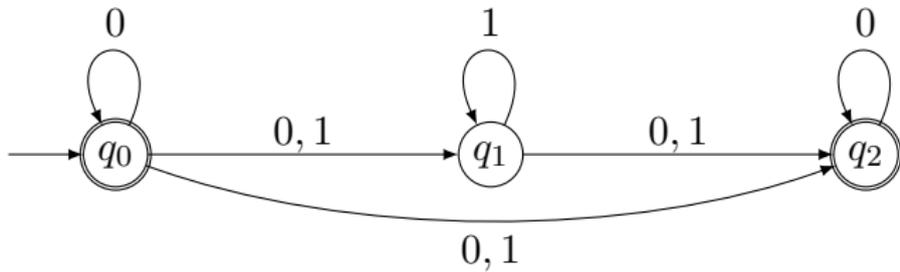
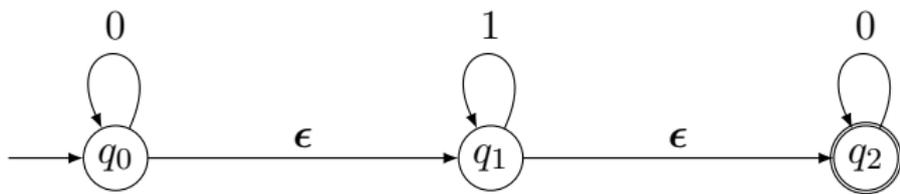
$$\exists i \geq 0. \hat{\delta}(\{q_0\}, \epsilon^i) \cap F \neq \emptyset$$

dann setze  $F' := F \cup \{q_0\}$ , sonst setze  $F' := F$ .



Ab jetzt: “ $\epsilon$ -Übergang” und “ $\epsilon$ -NFA”.

## Beispiel 3.17



## Fazit: Die Automatentypen

- DFA
- NFA
- $\epsilon$ -NFA

sind gleich mächtig und Erkennen die Sprachen der Grammatiken mit Produktionen folgender Gestalt:

- $X \rightarrow aY$
- $X \rightarrow a$
- $X \rightarrow Y$
- $X \rightarrow \epsilon$

### 3.4 Reguläre Ausdrücke

Reguläre Ausdrücke sind eine alternative Notation für die Definition von formalen Sprachen.

Werden oft in Kombination mit Grammatiken verwendet.

#### Beispiel 3.18

Ein Fragment der Grammatik für Python

(<https://docs.python.org/2/reference/grammar.html>)

```
simple_stmt: small_stmt (';' small_stmt)* [';'] NEWLINE
```

Steht für eine unendliche Menge von Produktionen:

```
simple_stmt → small_stmt NEWLINE
```

```
simple_stmt → small_stmt ';' NEWLINE
```

```
simple_stmt → small_stmt ';' small_stmt NEWLINE
```

```
simple_stmt → small_stmt ';' small_stmt ';' NEWLINE
```

...

## Definition 3.19

Reguläre Ausdrücke (*regular expressions*, REs) sind induktiv definiert:

- $\emptyset$  ist ein regulärer Ausdruck.
- $\epsilon$  ist ein regulärer Ausdruck.
- Für jedes  $a \in \Sigma$  ist  $a$  ein regulärer Ausdruck.
- Wenn  $\alpha$  und  $\beta$  reguläre Ausdrücke sind, dann auch
  - $\alpha\beta$
  - $\alpha \mid \beta$  (oft  $\alpha + \beta$  geschrieben)
  - $\alpha^*$
- Nichts sonst ist ein regulärer Ausdruck.

\* ist die Kleene'sche Iteration (Kleene iteration, Kleene star).

Bindungsstärke: \* bindet stärker als Konkatenation stärker als |

- $ab^* = a(b^*) \neq (ab)^*$
- $ab \mid c = (ab) \mid c \neq a(b \mid c)$

### Definition 3.20

Zu einem regulären Ausdruck  $\gamma$  ist die zugehörige Sprache  $L(\gamma)$  rekursiv definiert:

- $L(\emptyset) = \emptyset$
- $L(\epsilon) = \{\epsilon\}$
- $L(a) = \{a\}$
- $L(\alpha\beta) = L(\alpha)L(\beta)$
- $L(\alpha \mid \beta) = L(\alpha) \cup L(\beta)$
- $L(\alpha^*) = L(\alpha)^*$

## Beispiel 3.21

Sei das zugrunde liegende Alphabet  $\Sigma = \{0, 1\}$ .

- Alle Wörter, die mit 00 enden:

$$(0|1)^*00$$

- Alle Wörter gerader Länge, in denen 0 und 1 alternieren:

$$(01)^* \mid (10)^*$$

- Alle Wörter, die eine gerade Anzahl von 1'en enthalten:

$$(0^*10^*1)^*0^*$$

- Alle Wörter, die die Binärdarstellung einer durch 3 teilbaren Zahl darstellen, also

$$0, 11, 110, 1001, 1100, 1111, 10010, \dots$$

Hausaufgabe!

### Beispiel 3.22

Gleitkommazahlen:  $\Sigma = \{., -, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$$(- \mid \epsilon)(DD^* \mid DD^*.D^* \mid D^*.DD^*)$$

wobei  $D = (0|1|2|3|4|5|6|7|8|9)$

Version von Beispiel 3.6:

$$0 \mid (- \mid \epsilon)(ED^* \mid (0 \mid ED^*).D^*E)$$

wobei  $D = (0|1|2|3|4|5|6|7|8|9)$  und  $E = (1|2|3|4|5|6|7|8|9)$

## Erweiterte reguläre Ausdrücke in UNIX:

$$\cdot = a_1 | \dots | a_n \text{ wobei } \Sigma = \{a_1, \dots, a_n\}$$

$$[a_1 \dots a_n] = a_1 | \dots | a_n$$

$$[\hat{a}_1 \dots a_n] = b_1 | \dots | b_m \text{ wobei } \{b_1, \dots, b_m\} = \Sigma \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$$

$$\alpha? = \epsilon | \alpha$$

$$\alpha+ = \alpha\alpha^*$$

$$\alpha\{n\} = \alpha \dots \alpha \text{ (} n \text{ copies)}$$

...

Für die Gleitkommazahlen (erste Version) erhalten wir z. B.

$$-?([0-9]+|[0-9]+\.[0-9]*|[0-9]*\.[0-9]+)$$

### Satz 3.23 (Kleene 1956)

Eine Sprache  $L \subseteq \Sigma^*$  ist genau dann durch einen regulären Ausdruck darstellbar, wenn sie regulär ist.

Für den Beweis definieren wir:

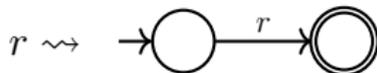
### Definition 3.24

Ein NFA mit RE-Übergängen ist ein NFA  $M$ , dessen Übergänge mit regulären Ausdrücken über demselben Alphabet  $\Sigma$  beschriftet sind. Ein Wort  $w \in \Sigma^*$  wird von  $M$  akzeptiert gdw  $M$  einen Pfad

$$q_0 \xrightarrow{\gamma_1} q_1 \xrightarrow{\gamma_2} q_2 \cdots q_{n-1} \xrightarrow{\gamma_n} q_n$$

mit folgenden Eigenschaften enthält:  $q_0$  ist der Anfangszustand,  $q_n$  ist Endzustand und  $w \in L(\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_n)$ .

NFA mit  $\epsilon$ -Übergängen sind ein Spezialfall. Reguläre Ausdrücke auch:



## Beweis:

“ $\implies$ ”: Sei  $\gamma$  ein regulärer Ausdruck. Wir konstruieren einen  $\epsilon$ -NFA  $N$  mit  $L(\gamma) = L(N)$  in zwei Schritten:

**Schritt 1 (preprocessing)**: Wir wenden folgende Ersetzungsregeln so lange wie möglich auf  $\gamma$  an:

$$\gamma \emptyset \rightsquigarrow \emptyset$$

$$\gamma \mid \emptyset \rightsquigarrow \gamma$$

$$\emptyset^* \rightsquigarrow \epsilon$$

$$\emptyset \gamma \rightsquigarrow \emptyset$$

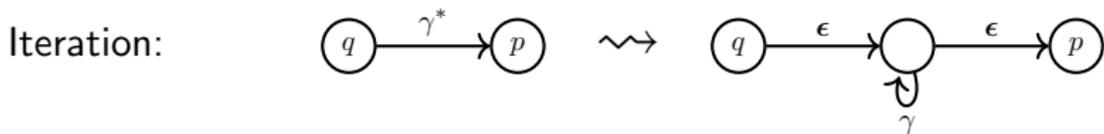
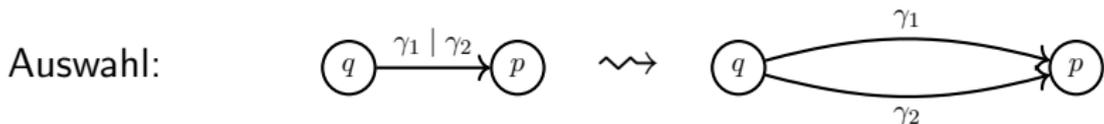
$$\emptyset \mid \gamma \rightsquigarrow \gamma$$

Die Regeln erhalten die Sprache des regulären Ausdrucks.

Das Endergebnis  $\gamma'$  ist entweder  $\emptyset$  (z.B. wenn  $\gamma = \emptyset\emptyset$ ) oder ein regulärer Ausdruck ohne Vorkommnisse von  $\emptyset$  (z.B. wenn  $\gamma = a\mid\emptyset$ ).

Im ersten Fall setzen wir  $N$  als der NFA mit nur einen Zustand, keine Endzustände und keine Übergänge. Im zweiten Fall machen wir mit Schritt 2 weiter.

Schritt 2: Wir wenden folgende Transformationsregeln so lange wie möglich auf den Automaten  $\rightarrow \text{O} \xrightarrow{\gamma'} \text{O} \rightarrow$  an.



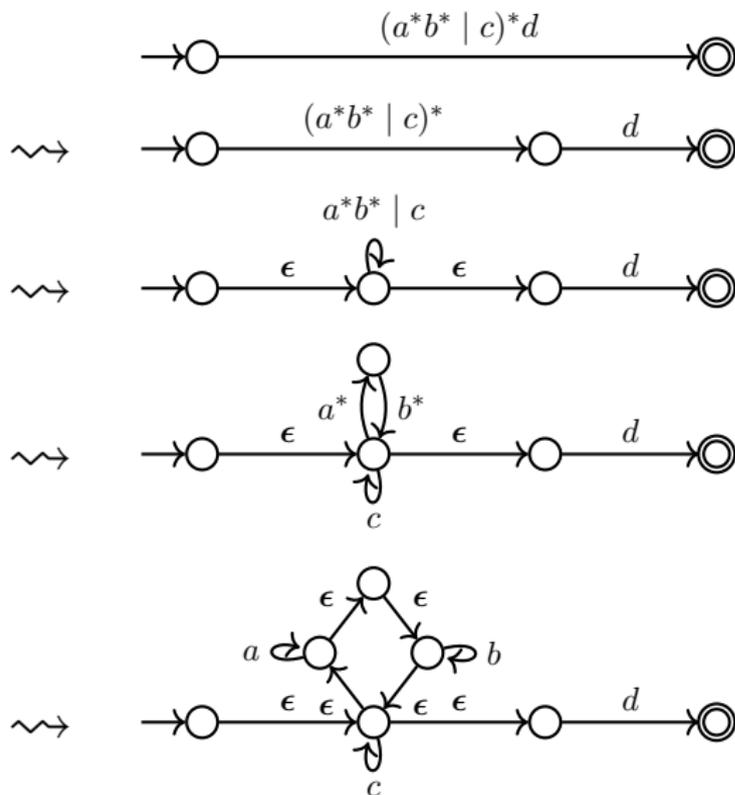
Beachte:  $q = p$  ist möglich und sowohl  $q$  wie auch  $p$  können Anfang oder Endzustände sein!.

Die Regeln erhalten die Sprache. (Übung!).

Das Endergebnis ist ein NFA mit  $\epsilon$ -Übergängen.

## Beispiel 3.25

Betrachte den regulären Ausdruck  $(a^*b^* | c)^*d$ .

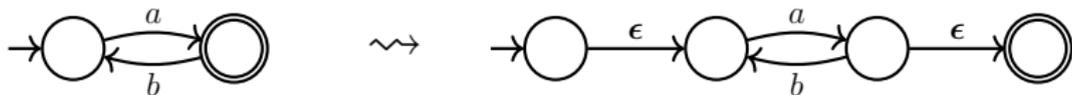


“ $\Leftarrow$ ”: Sei  $M = (Q, \Sigma, \delta, q_1, F)$  ein NFA mit  $\epsilon$ -Übergänge.

Wir konstruieren einen RE  $\gamma$  mit  $L(M) = L(\gamma)$  in zwei Schritten:

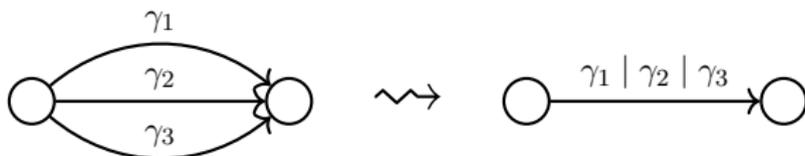
**Schritt 1 (preprocessing):** Wir transformieren  $M$  in einen äquivalenten Automaten a) mit höchstens einem Endzustand, b) ohne in den Anfangszustand einkommende Übergänge und c) ohne aus dem Endzustand ausgehende Übergänge:

- Hat  $q_1$  Eingangsübergänge, dann fügen wir einen neuen Zustand  $q_0$  hinzu sowie einen  $\epsilon$ -Übergang von  $q_0$  nach  $q_1$  und setzen  $q_0$  als neuer Anfangszustand.
- Enthält  $F$  mehr als einen Zustand oder einen Zustand mit Ausgangsübergängen, dann fügen wir einen neuen Zustand  $q_e$  sowie  $\epsilon$ -Übergänge vom jedem Zustand von  $F$  zu  $q_e$  und setzen  $q_e$  als (einzigem) neuen Endzustand.

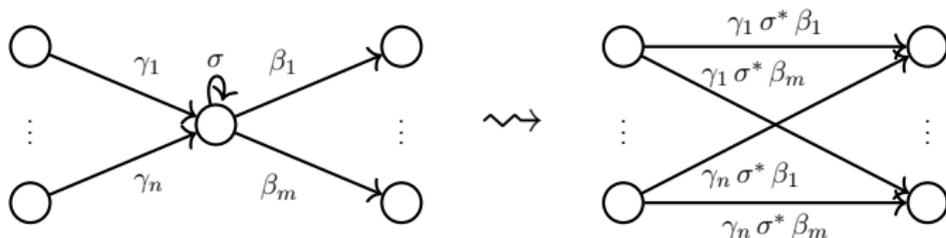


## Schritt 2: Wiederhole so lang wie möglich:

- Solange es Übergänge  $(q, \gamma_1, p)$  and  $(q, \gamma_2, p)$  gibt, ersetze sie durch einen einzigen Übergang  $(q, \gamma_1 \mid \gamma_2, p')$ .

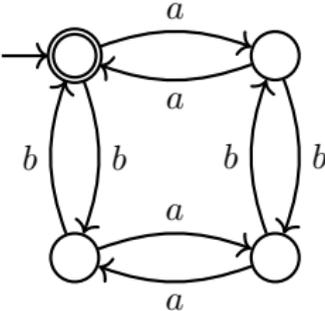


- Wähle Zustand  $q$  der weder Anfang- noch Endzustand ist.
- Hat  $q$  eine Schleife  $(q, \sigma, q)$ , dann ersetze jedes Paar  $(p, \gamma, q)$ ,  $(q, \beta, p')$  von Übergängen mit  $p \neq q \neq p'$  (aber möglicherweise  $p = p'$ ) durch  $(p, \gamma\sigma^*\beta, p')$ , sonst durch  $(p, \gamma\beta, p')$ .
- Entferne den Zustand  $q$  zusammen mit all seinen eingehenden und ausgehenden Übergängen.

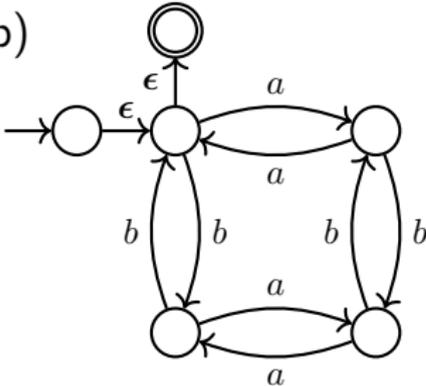


# Beispiel 3.26

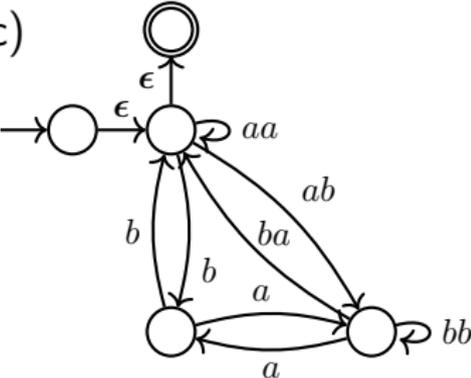
(a)



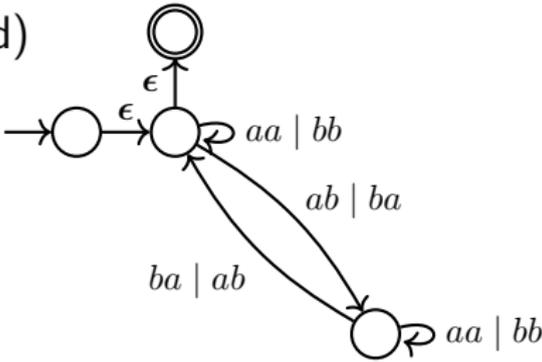
(b)

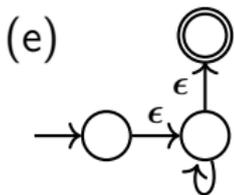


(c)

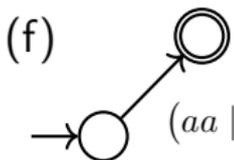


(d)





$$aa \mid bb \mid (ab \mid ba)(aa \mid bb)^*(ba \mid ab)$$



$$(aa \mid bb \mid (ab \mid ba)(aa \mid bb)^*(ba \mid ab))^*$$

### 3.5 Von NFA zu RE als Lösung eines Gleichungssystems

Gleichungen, deren Variablen für unbekannte **reguläre Ausdrücke** und das Gleichheitszeichen für Sprachäquivalenz stehen.

#### Beispiel 3.27

$X \equiv aX \mid b$     Lösungen: alle RE  $\gamma$  mit  $\gamma \equiv a^*b$ .

$X \equiv X \mid aX$     Lösungen: ?

$X \equiv aX$     Lösungen: ?

#### Satz 3.28 (Ardens Lemma)

*Sind  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $X$  reguläre Ausdrücke mit  $\epsilon \notin L(\alpha)$ , so gilt*

$$X \equiv \alpha X \mid \beta \quad \Longrightarrow \quad X \equiv \alpha^* \beta$$

## Beweis von Ardens Lemma

Wir nehmen an  $X \equiv \alpha X \mid \beta$ .

$$\begin{aligned} X &\equiv \alpha(\alpha X \mid \beta) \mid \beta \equiv \alpha^2 X \mid \alpha\beta \mid \beta \\ &\equiv \alpha^2(\alpha X \mid \beta) \mid \alpha\beta \mid \beta \equiv \alpha^3 X \mid \alpha^2\beta \mid \alpha\beta \mid \beta \equiv \dots \end{aligned}$$

Wir zeigen mit Induktion für alle  $n \in \mathbb{N}$ :

$$X \equiv \alpha^{n+1} X \mid (\alpha^n \mid \alpha^{n-1} \mid \dots \mid \alpha \mid \epsilon)\beta \quad (1)$$

$n = 0$ : Behauptung wird zu  $X \equiv \alpha X \mid \beta$ , die Annahme.

$$\begin{aligned} n \rightarrow n + 1: \quad X &\equiv \alpha^{n+1} X \mid (\alpha^n \mid \dots \mid \alpha \mid \epsilon)\beta \\ &\equiv \alpha^{n+1}(\alpha X \mid \beta) \mid (\alpha^n \mid \dots \mid \alpha \mid \epsilon)\beta \\ &\equiv \alpha^{n+2} X \mid \alpha^{n+1}\beta \mid (\alpha^n \mid \dots \mid \alpha \mid \epsilon)\beta \\ &\equiv \alpha^{n+2} X \mid (\alpha^{n+1} \mid \alpha^n \mid \dots \mid \alpha \mid \epsilon)\beta \end{aligned}$$

Wir zeigen nun  $X \equiv \alpha^*\beta$ , d.h.  $L(X) = L(\alpha^*\beta)$ .

$L(\alpha^*\beta) \subseteq L(X)$ :

$$\begin{aligned}w \in L(\alpha^*\beta) &= \bigcup_{n \geq 0} L(\alpha^n\beta) \\ \implies \exists n. w \in L(\alpha^n\beta) \\ \implies w \in L(X) & \qquad \text{(wegen (1))}\end{aligned}$$

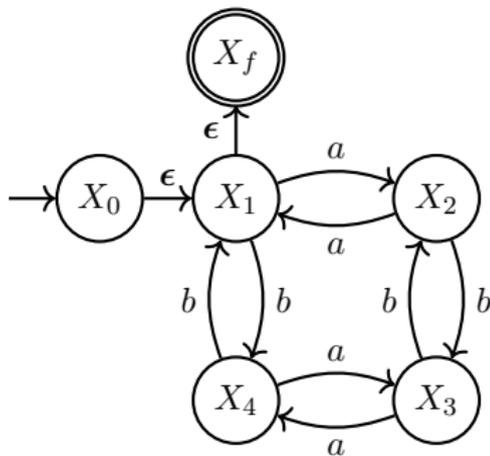
$L(X) \subseteq L(\alpha^*\beta)$ : Sei  $w \in L(X)$  und  $n := |w|$ .

$$\begin{aligned}\epsilon &\notin L(\alpha) \\ \implies \forall u \in L(\alpha^{n+1}). |u| &\geq n + 1 \\ \implies w &\notin L(\alpha^{n+1}X) \\ \implies w \in L((\alpha^n \mid \cdots \mid \alpha \mid \epsilon)\beta) & \qquad \text{(wegen (1))} \\ \implies w \in L(\alpha^*\beta)\end{aligned}$$



Von NFA nach RE.

Erster Schritt: NFA als Gleichungssystem darstellen:



$$X_0 \equiv X_1$$

$$X_1 \equiv aX_2 \mid bX_4 \mid X_f$$

$$X_2 \equiv aX_1 \mid bX_3$$

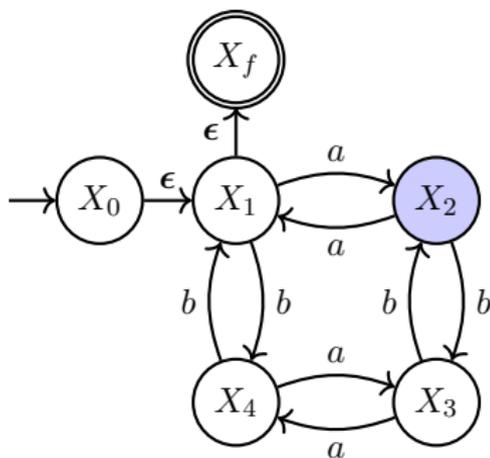
$$X_3 \equiv aX_4 \mid bX_2$$

$$X_4 \equiv aX_3 \mid bX_1$$

$$X_f \equiv \epsilon$$

Zweiter Schritt: Gleichungssystem lösen:

1. Zustand  $X_2$  eliminieren  $\rightsquigarrow$   
Variable  $X_2$  eliminieren durch Einsetzen



$$X_0 \equiv X_1$$

$$X_1 \equiv aX_2 \mid bX_4 \mid X_f$$

$$X_2 \equiv aX_1 \mid bX_3$$

$$X_3 \equiv aX_4 \mid bX_2$$

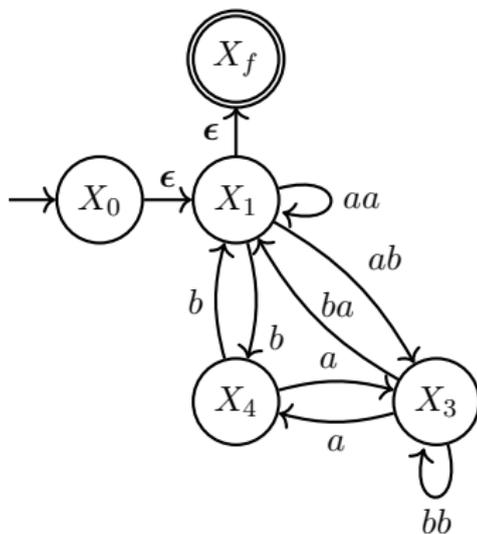
$$X_4 \equiv aX_3 \mid bX_1$$

$$X_f \equiv \epsilon$$

Zweiter Schritt: Gleichungssystem lösen:

1. Zustand  $X_2$  eliminieren  $\rightsquigarrow$

Variable  $X_2$  eliminieren durch Einsetzen



$$X_0 \equiv X_1$$

$$X_1 \equiv a(aX_1 \mid bX_3) \mid bX_4 \mid X_f$$

$$X_3 \equiv aX_4 \mid b(aX_1 \mid bX_3)$$

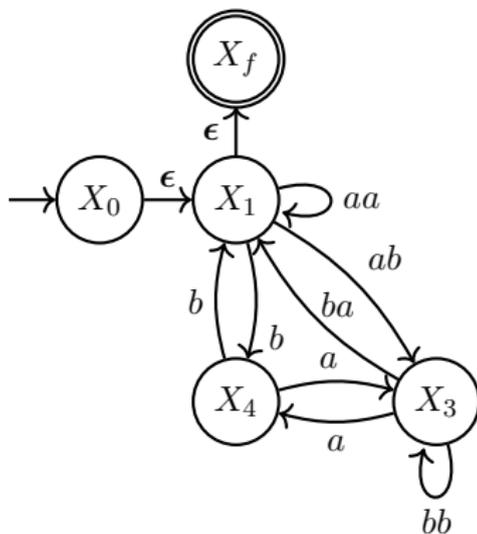
$$X_4 \equiv aX_3 \mid bX_1$$

$$X_f \equiv \epsilon$$

Zweiter Schritt: Gleichungssystem lösen:

1. Zustand  $X_2$  eliminieren  $\rightsquigarrow$

Variable  $X_2$  eliminieren durch Einsetzen



$$X_0 \equiv X_1$$

$$X_1 \equiv aaX_1 \mid abX_3 \mid bX_4 \mid X_f$$

$$X_3 \equiv baX_1 \mid aX_4 \mid bbX_3$$

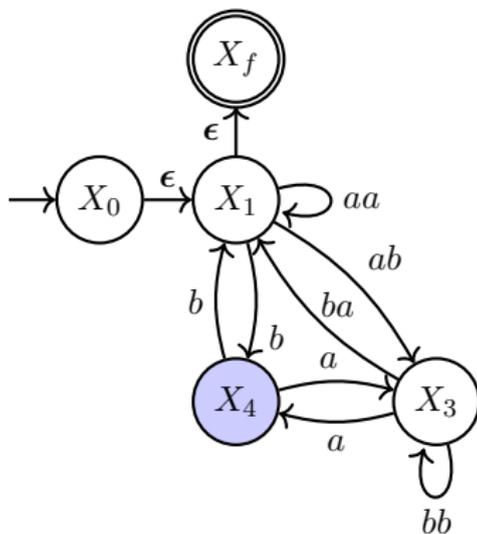
$$X_4 \equiv aX_3 \mid bX_1$$

$$X_f \equiv \epsilon$$

Zweiter Schritt: Gleichungssystem lösen:

2. Zustand  $X_4$  eliminieren  $\rightsquigarrow$

Variable  $X_4$  eliminieren durch Einsetzen



$$X_0 \equiv X_1$$

$$X_1 \equiv aaX_1 \mid abX_3 \mid bX_4 \mid X_f$$

$$X_3 \equiv baX_1 \mid aX_4 \mid bbX_3$$

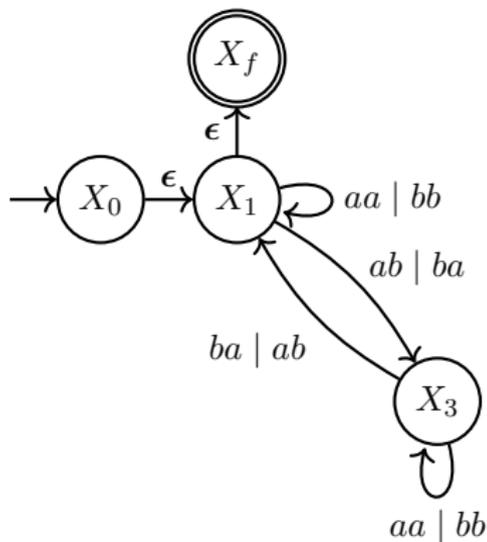
$$X_4 \equiv aX_3 \mid bX_1$$

$$X_f \equiv \epsilon$$

Zweiter Schritt: Gleichungssystem lösen:

2. Zustand  $X_4$  eliminieren  $\rightsquigarrow$

Variable  $X_4$  eliminieren durch Einsetzen



$$X_0 \equiv X_1$$

$$X_1 \equiv (aa | bb)X_1 | (ab | ba)X_3 | X_f$$

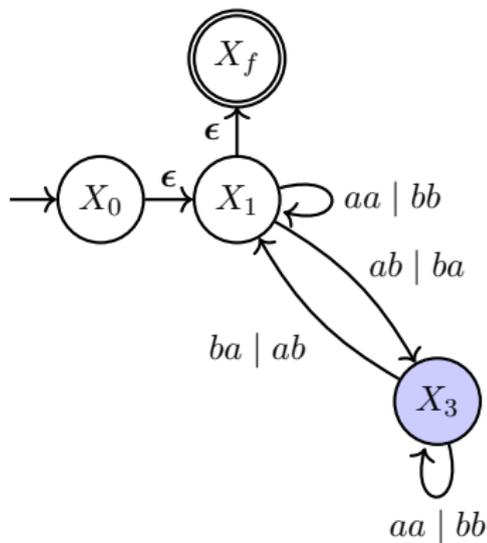
$$X_3 \equiv (ba | ab)X_1 | (aa | bb)X_3$$

$$X_f \equiv \epsilon$$

Zweiter Schritt: Gleichungssystem lösen:

3. Zustand  $X_3$  eliminieren  $\rightsquigarrow$

Variable  $X_3$  eliminieren mit Hilfe von Ardens Lemma



$$X_0 \equiv X_1$$

$$X_1 \equiv (aa | bb)X_1 | (ab | ba)X_3 | X_f$$

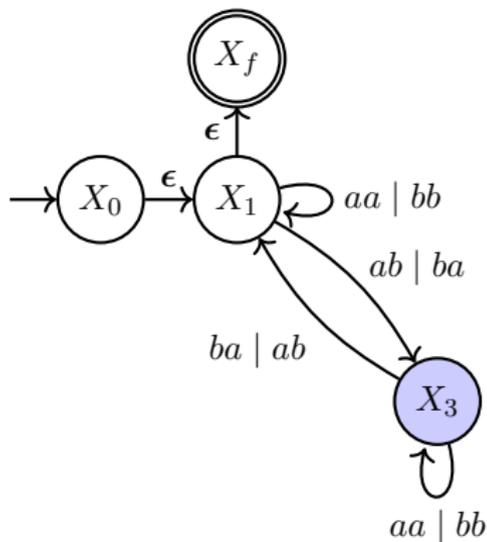
$$X_3 \equiv (ba | ab)X_1 | (aa | bb)X_3$$

$$X_f \equiv \epsilon$$

Zweiter Schritt: Gleichungssystem lösen:

3. Zustand  $X_3$  eliminieren  $\rightsquigarrow$

Variable  $X_3$  eliminieren mit Hilfe von Ardens Lemma



$$X_0 \equiv X_1$$

$$X_1 \equiv (aa \mid bb)X_1 \mid (ab \mid ba)X_3 \mid X_f$$

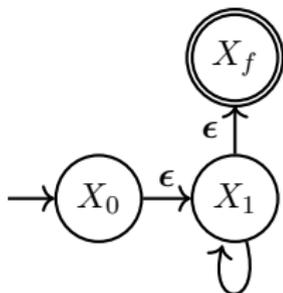
$$X_3 \equiv (aa \mid bb)^*(ba \mid ab)X_1$$

$$X_f \equiv \epsilon$$

Zweiter Schritt: Gleichungssystem lösen:

3. Zustand  $X_3$  eliminieren  $\rightsquigarrow$

Variable  $X_3$  eliminieren mit Hilfe von Ardens Lemma



$$aa \mid bb \mid \\ (ab \mid ba)(aa \mid bb)^*(ba \mid ab)$$

$$X_0 \equiv X_1$$

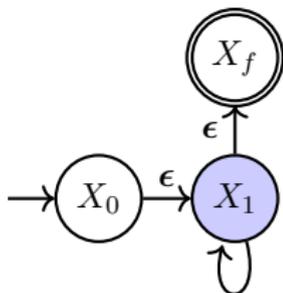
$$X_1 \equiv (aa \mid bb \mid \\ (ab \mid ba)(aa \mid bb)^*(ba \mid ab))X_1 \mid \\ X_f$$

$$X_f \equiv \epsilon$$

Zweiter Schritt: Gleichungssystem lösen:

4. Zustand  $X_1$  eliminieren  $\rightsquigarrow$

Variable  $X_1$  eliminieren mit Hilfe von Ardens Lemma



$$aa \mid bb \mid \\ (ab \mid ba)(aa \mid bb)^*(ba \mid ab)$$

$$X_0 \equiv X_1$$

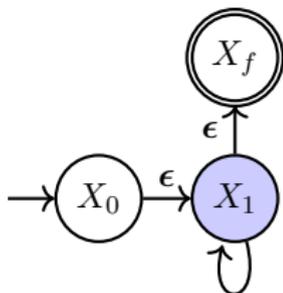
$$X_1 \equiv (aa \mid bb \mid \\ (ab \mid ba)(aa \mid bb)^*(ba \mid ab)) X_1 \mid \\ X_f$$

$$X_f \equiv \epsilon$$

Zweiter Schritt: Gleichungssystem lösen:

4. Zustand  $X_1$  eliminieren  $\rightsquigarrow$

Variable  $X_1$  eliminieren mit Hilfe von Ardens Lemma



$$aa \mid bb \mid \\ (ab \mid ba)(aa \mid bb)^*(ba \mid ab)$$

$$X_0 \equiv X_1$$

$$X_1 \equiv (aa \mid bb \mid$$

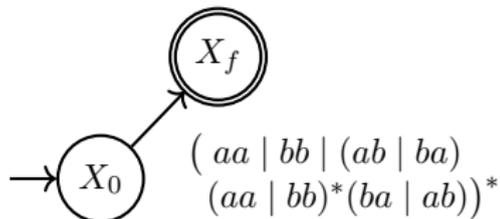
$$(ab \mid ba)(aa \mid bb)^*(ba \mid ab))^* X_f$$

$$X_f \equiv \epsilon$$

Zweiter Schritt: Gleichungssystem lösen:

4. Zustand  $X_1$  eliminieren  $\rightsquigarrow$

Variable  $X_1$  eliminieren mit Hilfe von Ardens Lemma

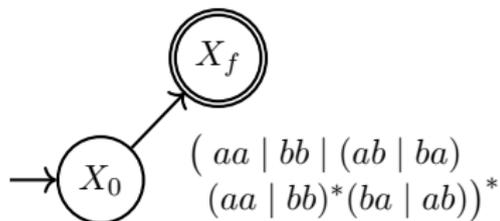


$$X_0 \equiv (aa \mid bb \mid (ab \mid ba)(aa \mid bb)^*(ba \mid ab))^* X_f$$

$$X_f \equiv \epsilon$$

Zweiter Schritt: Gleichungssystem lösen:

5. Variable  $X_f$  eliminieren durch Einsetzen

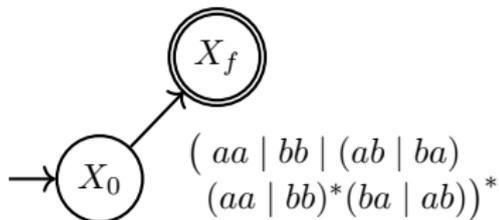


$$X_0 \equiv (aa \mid bb \mid (ab \mid ba)(aa \mid bb)^*(ba \mid ab))^* X_f$$

$$X_f \equiv \epsilon$$

Zweiter Schritt: Gleichungssystem lösen:

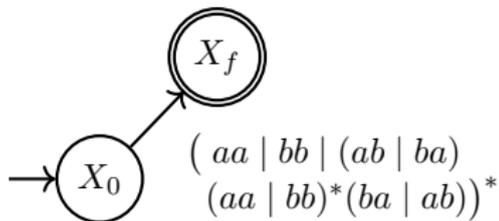
5. Variable  $X_f$  eliminieren durch Einsetzen



$$X_0 \equiv (aa \mid bb \mid (ab \mid ba)(aa \mid bb)^*(ba \mid ab))^* \epsilon$$

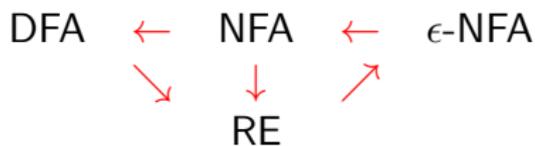
Zweiter Schritt: Gleichungssystem lösen:

5. Variable  $X_f$  eliminieren durch Einsetzen



$$X_0 \equiv (aa \mid bb \mid (ab \mid ba)(aa \mid bb)^*(ba \mid ab))^*$$

Unsere Konversionen auf einen Blick:



RE → ε-NFA: RE der Länge  $n \rightsquigarrow O(n)$  Zustände

ε-NFA → NFA:  $Q \rightsquigarrow Q$

NFA → DFA:  $n$  Zustände  $\rightsquigarrow O(2^n)$  Zustände

NFA → RE:  $n$  Zustände  $\rightsquigarrow$  RE der Länge  $O(3^n)$

**Beweis** NFA → RE:  $m_k :=$  maximale Länge der RE nach Entfernung von  $k$  Zuständen

- $m_0 = 1$
- $m_{k+1} \leq 3m_k + 1$
- Länge des Gesamtausdrucks:  $O(3^n)$

## 3.6 Rechnen mit regulären Ausdrücken

### Definition 3.29

Zwei reguläre Ausdrücke sind **äquivalent** gdw sie die gleiche Sprache darstellen:

$$\alpha \equiv \beta \quad :\Leftrightarrow \quad L(\alpha) = L(\beta)$$

Beispiel zum Unterschied von  $=$  (syntaktische Identität) und  $\equiv$  (Bedeutungsäquivalenz):

$(\alpha \mid \beta) \equiv (\beta \mid \alpha)$  aber  $(\alpha \mid \beta) \neq (\beta \mid \alpha)$ .

Null und Eins:

### Lemma 3.30

- $\emptyset \mid \alpha \equiv \alpha \mid \emptyset \equiv \alpha$
- $\emptyset \alpha \equiv \alpha \emptyset \equiv \emptyset$
- $\epsilon \alpha \equiv \alpha \epsilon \equiv \alpha$
- $\emptyset^* \equiv \epsilon$
- $\epsilon^* \equiv \epsilon$

## Lemma 3.31

*Assoziativität:*

- $(\alpha \mid \beta) \mid \gamma \equiv \alpha \mid (\beta \mid \gamma)$
- $(\alpha\beta)\gamma \equiv \alpha(\beta\gamma)$

*Kommutativität:*

- $\alpha \mid \beta \equiv \beta \mid \alpha$

*Distributivität:*

- $\alpha(\beta \mid \gamma) \equiv \alpha\beta \mid \alpha\gamma$
- $(\alpha \mid \beta)\gamma \equiv \alpha\gamma \mid \beta\gamma$

*Idempotenz:*

- $\alpha \mid \alpha \equiv \alpha$

Stern:

### Lemma 3.32

- $\epsilon \mid \alpha\alpha^* \equiv \alpha^*$
- $\alpha^*\alpha \equiv \alpha\alpha^*$
- $(\alpha^*)^* \equiv \alpha^*$

### Beispiel 3.33

Herleitung einer Äquivalenz aus obigen Lemmas:

$$\begin{aligned} & \epsilon \mid \alpha^* \\ \equiv & \epsilon \mid (\epsilon \mid \alpha\alpha^*) && \text{Stern Lemma} \\ \equiv & (\epsilon \mid \epsilon) \mid \alpha\alpha^* && \text{Assoziativität} \\ \equiv & \epsilon \mid \alpha\alpha^* && \text{Idempotenz} \\ \equiv & \alpha^* && \text{Stern Lemma} \end{aligned}$$

Lässt sich jede gültige Äquivalenz  $\alpha \equiv \beta$  aus den obigen Lemmas für  $\equiv$  herleiten?

### Satz 3.34 (Redko 1964)

*Es gibt keine endliche Menge von gültigen Äquivalenzen aus denen sich alle gültigen Äquivalenzen herleiten lassen.*

Wenn man mehr als nur Äquivalenzen zulässt:



Arto Salomaa.

*Two Complete Axiom Systems for the Algebra of Regular Events.* Journal of the ACM, 1966.

### 3.7 Abschlusseigenschaften regulärer Sprachen

#### Satz 3.35

Seien  $R, R_1, R_2 \subseteq \Sigma^*$  reguläre Sprachen. Dann sind auch

$$R_1 R_2, R_1 \cup R_2, R^*, \overline{R} \quad (:= \Sigma^* \setminus R), R_1 \cap R_2, R_1 \setminus R_2$$

reguläre Sprachen.

#### Beweis:

$R_1 R_2, R_1 \cup R_2$ , und  $R^*$ : klar.

$\overline{R}$  Sei  $R = L(A)$  für einen DFA  $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ .

Betrachte  $A' = (Q, \Sigma, \delta, q_0, Q \setminus F)$ .

Dann ist  $L(A') = \overline{L(A)} = \overline{R}$

$$R_1 \cap R_2 = \overline{\overline{R_1} \cup \overline{R_2}} \quad (\text{De Morgan})$$

$$R_1 \setminus R_2 = R_1 \cap \overline{R_2}$$



## **Bemerkung**

Komplementierung ( $\overline{R}$ ) durch Vertauschen von Endzuständen und Nicht-Endzuständen funktioniert nur bei DFAs, nicht bei NFAs!

Bei NFAs:

Komplementierung erzwingt Determinierung.

Komplementierung ist (potenziell) teuer.

Die **Produkt-Konstruktion**: Durchschnitt direkt auf DFAs, ohne Umweg über de Morgan.

Beide DFAs laufen synchron parallel, Wort wird akzeptiert wenn *beide* akzeptieren.

Parallelismus = Kreuzprodukt der Zustandsräume

### Satz 3.36

Sind  $M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, s_1, F_1)$  und  $M_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, s_2, F_2)$  DFAs, dann ist der **Produkt-Automat**

$$M := (Q_1 \times Q_2, \Sigma, \delta, (s_1, s_2), F_1 \times F_2)$$
$$\delta((q_1, q_2), a) := (\delta_1(q_1, a), \delta_2(q_2, a))$$

ein DFA der  $L(M_1) \cap L(M_2)$  akzeptiert.

Erinnerung:  $|Q_1 \times Q_2| = |Q_1| |Q_2|$ .

## Beweis:

Durch Induktion über  $w$  läßt sich zeigen:

$$\hat{\delta}((q_1, q_2), w) = (\hat{\delta}_1(q_1, w), \hat{\delta}_2(q_2, w)).$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned} & w \in L(M) \\ \Leftrightarrow & (\hat{\delta}((s_1, s_2), w) \in F_1 \times F_2 \\ \Leftrightarrow & (\hat{\delta}_1(s_1, w), \hat{\delta}_2(s_2, w)) \in F_1 \times F_2 \\ \Leftrightarrow & \hat{\delta}_1(s_1, w) \in F_1 \wedge \hat{\delta}_2(s_2, w) \in F_2 \\ \Leftrightarrow & w \in L(M_1) \wedge w \in L(M_2) \\ \Leftrightarrow & w \in L(M_1) \cap L(M_2) \end{aligned}$$



Funktioniert Durchschnitt durch Produkt auch für NFAs?

### 3.8 Pumping Lemma

Oder: *Wie zeigt man, dass eine Sprache nicht regulär ist?*

Für Typ-3-Sprachen können wir automatisch effiziente Recognizer synthetisieren.

Sind Typ-3-Grammatiken mächtig genug für den Entwurf von Programmiersprachen?

- Jede Programmiersprache braucht arithmetische Ausdrücke.
- Die Grammatik für arithmetische Ausdrücke aus Beispiel 2.11 ist nicht rechtslinear.
- Das zeigt jedoch noch nicht, dass die Sprache der arithmetischen Ausdrücke nicht regulär ist. Es könnte eine andere rechtslineare Grammatik geben (vielleicht viel größer als die aus Beispiel 2.11), die dieselbe Sprache erzeugt.

### Satz 3.37 (Pumping Lemma für reguläre Sprachen)

Sei  $R \subseteq \Sigma^*$  regulär. Dann gibt es ein  $n > 0$ , so dass sich jedes  $z \in R$  mit  $|z| \geq n$  so in  $z = uvw$  zerlegen lässt, dass

- $v \neq \epsilon$ ,
- $|uv| \leq n$ , und
- $\forall i \geq 0. uv^i w \in R$ .

## Beweis:

Sei  $R = L(A)$ ,  $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ .

Sei  $n = |Q|$ . Sei nun  $z = a_1 \dots a_m \in R$  mit  $m \geq n$ .

Die beim Lesen von  $z$  durchlaufene Zustandsfolge sei

$$q_0 = p_0 \xrightarrow{a_1} p_1 \xrightarrow{a_2} p_2 \dots \xrightarrow{a_m} p_m$$

Dann muss es  $0 \leq i < j \leq n$  geben mit  $p_i = p_j$ .

Wir teilen  $z$  wie folgt auf:  $\underbrace{a_1 \dots a_i}_u \underbrace{a_{i+1} \dots a_j}_v \underbrace{a_{j+1} \dots a_{|z|}}_w$

Damit gilt:

- $|uv| \leq n$ ,
- $v \neq \epsilon$ , und
- $\forall l \geq 0. uv^l w \in R$ .



[Darf  $A$  NFA sein?]

- Logische Struktur: für jede reguläre Sprache  $R$

$\exists n > 0. \forall z \in R \text{ mit } |z| \geq n. \exists u, v, w. z = uvw \wedge \dots$

- Spielbasierte Formulierung.

Sei  $R$  eine Sprache (regulär oder nicht). Eine Partie des  $R$ -Spiels zwischen zwei Spielern läuft so:

- **Spieler I** wählt eine Zahl  $n > 0$
- **Spieler II** wählt ein Wort  $z \in R$  mit  $|z| \geq n$
- **Spieler I** wählt eine Zerlegung  $uvw$  von  $z$ .

**Spieler I** gewinnt, wenn  $uvw$  die gewünschten Eigenschaften erfüllt, sonst gewinnt **Spieler II**.

- Das Pumping Lemma sagt: für jede reguläre Sprache  $R$ , **Spieler I** hat eine *Gewinnstrategie* im  $R$ -Spiel, d.h., wenn er richtig spielt, dann gewinnt er jede Partie.
- Gewinnstrategie für **Spieler I**: Regeln, um erst eine **Pumping-Lemma-Zahl**  $n$ , und dann eine **gute** Zerlegung  $uvw$  zu wählen (eine Zerlegung, die die Eigenschaften erfüllt).

Falls  $L(M) = R$  so ist  $|Q_M|$  eine Pumping-Lemma-Zahl für  $R$ .

Anwendung des Pumping Lemmas:

- Um zu beweisen, dass  $R$  nicht regulär ist, zeige, dass **Spieler I** keine Gewinnstrategie hat.
  - Durch Widerspruch
  - Äquivalent: Zeige, dass **Spieler II** eine Gewinnstrategie hat (Regeln, um  $z$  in Abhängigkeit von  $R$  und  $n$  zu wählen).

### Satz 3.38

Die Sprache  $\{a^i b^i \mid i \in \mathbb{N}\}$  ist nicht regulär.

#### Beweis:

Angenommen,  $L$  sei doch regulär.

Sei  $n$  eine Pumping-Lemma-Zahl für  $L$ .

Wähle  $z = a^n b^n \in L$ .

Jede gute Zerlegung  $uvw$  von  $z$  erfüllt

$u, v \in \{a\}^*$  (weil  $|uv| \leq n$ ) und  $v \neq \epsilon$ .

Damit müsste gelten  $a^{n-|v|} b^n = uv \in L$ .  $\nexists$



“Endliche Automaten können nicht unbegrenzt zählen”

Ist die Sprache  $\{a^n b^n \mid n \leq 10^6\}$  regulär?

### Satz 3.39

$L = \{0^{m^2} \mid m \geq 0\}$  ist nicht regulär.

#### Beweis:

Angenommen,  $L$  sei doch regulär.

Sei  $n$  eine Pumping-Lemma-Zahl für  $L$ .

Wähle  $z = 0^{n^2} \in L$ . Sei  $uvw$  eine Zerlegung von  $z$  mit

$$1 \leq |v| \leq |uv| \leq n$$

Wir zeigen  $uv^2w \notin L$ . D.h., wir beweisen, dass  $|uv^2w|$  keine Quadratzahl ist. Mit

$$n^2 = |z| = |uvw| < |uv^2w| \leq n^2 + n < n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$$

gilt  $n^2 < |uv^2w| < (n + 1)^2$ . Zwischen  $n^2$  und  $(n + 1)^2$  liegt keine Quadratzahl. □

### Satz 3.40

Die Sprache der wohlgeklammerten Ausdrücke über dem Alphabet  $\{(, )\}$  ist nicht regulär.

Beweis:

Aufgabe. □

### Satz 3.41

Die Sprache *Arith* der arithmetischen Ausdrücken ist nicht regulär.

Beweis:

Angenommen, *Arith* sei doch regulär.

Dann gibt es einen DFA  $A$  mit  $L(A) = \textit{Arith}$ .

Ersetze alle Transitionen von  $A$ , die nicht mit  $($  oder  $)$  beschriftet sind durch  $\epsilon$ -Transitionen.

Der resultierende  $\epsilon$ -NFA erkennt die Sprache der wohlgeklammerten Ausdrücke. Widerspruch zu Satz 3.40. □

## Bemerkung

Es gibt nicht-reguläre Sprachen, für die das Pumping-Lemma gilt!

⇒ Pumping-Lemma hinreichend aber nicht notwendig um Nicht-Regularität zu zeigen.

regulär  $\subset$  Pumping-Lemma gilt  $\subset$  alle Sprachen

### 3.9 Entscheidungsverfahren

Wir untersuchen **Entscheidungsprobleme für reguläre Sprachen**, d.h., Probleme der Gestalt

**Eingabe:** Ein oder mehrere Objekte, die reguläre Sprachen beschreiben (DFA, NFA, RE Typ 3 Gram., ...)

**Frage:** Haben die Sprachen dieser Objekte eine Eigenschaft X?

Ein (Entscheidungs)Problem ist **entscheidbar**, wenn es einen Algorithmus gibt, der bei jeder Eingabe in endlicher Zeit die richtige Antwort auf die Frage feststellt.

In der zweiten Hälfte der Vorlesung wird gezeigt, dass nicht alle Entscheidungsprobleme für Grammatiken entscheidbar sind!

Welche Entscheidungsprobleme sind für rechtslineare Grammatiken (oder DFA; NFA; RE ...) entscheidbar?

Wie hängt die Laufzeit des Algorithmus mit der Beschreibung zusammen?

### Definition 3.42

Sei  $D$  ein DFA, NFA, RE, rechtslineare Grammatik . . . .

**Wortproblem:** Gegeben  $w$  und  $D$ , gilt  $w \in L(D)$ ?

**Leerheitsproblem:** Gegeben  $D$ , gilt  $L(D) = \emptyset$ ?

**Endlichkeitsproblem:** Gegeben  $D$ , ist  $L(D)$  endlich?

**Äquivalenzproblem:** Gegeben  $D_1, D_2$ , gilt  $L(D_1) = L(D_2)$ ?

### Lemma 3.43

*Das Wortproblem ist für ein Wort  $w$  und DFA  $M$  in Zeit  $O(|w| + |M|)$  entscheidbar.*

### Lemma 3.44

*Das Wortproblem ist für ein Wort  $w$  und NFA  $N$  in Zeit  $O(|Q|^2|w| + |N|)$  entscheidbar.*

### Beweis:

Sei  $w = a_1 \dots a_n$ .

$S := \{q_0\}$

**for**  $i := 1$  **to**  $n$  **do**  $S := \bigcup_{q \in S} \delta(q, a_i)$

**return**  $(S \cap F \neq \emptyset)$



### Lemma 3.45

*Das Leerheitsproblem ist für NFAs und DFAs entscheidbar (in Zeit  $O(|Q|^2|\Sigma|)$  bzw  $O(|Q||\Sigma|)$ ).*

#### Beweis:

$L(M) = \emptyset$  gdw kein Endzustand von  $q_0$  erreichbar ist.

Dies ist eine einfache Suche in einem Graphen, die jede Kante maximal ein Mal benutzen muss.

Ein NFA hat  $\leq |Q|^2|\Sigma|$  Kanten, ein DFA hat  $\leq |Q||\Sigma|$  Kanten.  $\square$

Ist  $\Sigma$  fix, z.B. ASCII, so wird daraus  $O(|Q|^2)$  bzw  $O(|Q|)$ .

### Lemma 3.46

Das Endlichkeitsproblem ist für DFAs oder NFAs entscheidbar.

#### Beweis:

$|L(M)| = \infty$  gdw von  $q_0$  aus eine nicht-leere Schleife erreichbar ist, von der aus  $F$  erreichbar ist.

```
Reach(K) =   R :=  $\emptyset$ ; W := K
              while W  $\neq \emptyset$  do
                pick and remove some  $p \in W$ 
                if  $p \notin R$  then
                  R :=  $R \cup \{p\}$ ; W :=  $W \cup \bigcup_{a \in \Sigma} \delta(p, a)$ 
              return R
```

```
Finite(Q,  $\Sigma$ ,  $\delta$ ,  $q_0$ , F) = R := Reach( $\{q_0\}$ )
                                C :=  $\{p \in R \mid p \in \text{Reach}(\bigcup_{a \in \Sigma} \delta(p, a))\}$ 
                                return (Reach(C)  $\cap F = \emptyset$ )
```



### Lemma 3.47

*Das Äquivalenzproblem ist für DFAs entscheidbar.*

#### Beweis:

Folgt direkt aus

$$L_1 \subseteq L_2 \Leftrightarrow L_1 \cap \overline{L_2} = \emptyset$$

$$L_1 = L_2 \Leftrightarrow L_1 \subseteq L_2 \wedge L_2 \subseteq L_1$$

da für DFAs Komplement und Durchschnitt wieder endliche Automaten liefern und das Leerheitsproblem für endliche Automaten entscheidbar ist. □

### Satz 3.48

Das Äquivalenzproblem für DFAs ist in Zeit  $O(|Q_1||Q_2||\Sigma|)$  entscheidbar.

#### Beweis:

Gegeben: DFAs  $M_1$  mit  $m$  und  $M_2$  mit  $n$  Zuständen.

Mit Hilfe der Produkt-Konstruktion für  $\cap$  folgt:

	Anzahl der Zustände
$\overline{L(M_1)} \cap \overline{L(M_2)}$	$mn$
$\overline{L(M_1)} \cap L(M_2)$	$mn$



### Korollar 3.49

Das Äquivalenzproblem für NFAs ist in Zeit  $O(2^{|Q_1|+|Q_2|})$  entscheidbar (bei fixem  $\Sigma$ ).

#### Beweis:

2 NFAs mit  $m$  und  $n$  Zuständen  $\rightsquigarrow$

2 DFAs mit  $2^m$  und  $2^n$  Zuständen  $\rightsquigarrow$

Äquivalenztest in Zeit  $O(2^m 2^n)$



### Korollar 3.50

Das Äquivalenzproblem für reguläre Ausdrücke ist entscheidbar.

## **Fazit:**

Die Kodierung der Eingabe (DFA, NFA, RE, ...) kann entscheidend für die Komplexität eines Problems sein.

### 3.10 Minimierung endlicher Automaten

Wir zeigen, dass jede reguläre Sprache einen **einzigsten minimalen Recognizer** hat und geben Algorithmen an, die diesen Recognizer konstruieren.

- 1 Beispiele
- 2 Algorithmen
- 3 Minimalitätsbeweis

## Algorithmus zur Minimierung eines DFA

- 1 Entferne alle von  $q_0$  aus nicht erreichbaren Zustände.
- 2 Berechne die **äquivalenten** Zustände des Automaten.
- 3 Kollabiere den Automaten durch Zusammenfassung aller äquivalenten Zustände.

Zustände  $p$  und  $q$  sind **unterscheidbar** wenn es  $w \in \Sigma^*$  gibt mit  $\hat{\delta}(p, w) \in F$  und  $\hat{\delta}(q, w) \notin F$  oder umgekehrt.

Zustände sind **äquivalent** wenn sie nicht unterscheidbar sind, d.h. wenn für alle  $w \in \Sigma^*$  gilt:

$$\hat{\delta}(p, w) \in F \quad \Leftrightarrow \quad \hat{\delta}(q, w) \in F$$

- Gilt  $p \in F$  und  $q \notin F$ , dann sind  $p$  und  $q$  unterscheidbar.
- Sind  $\delta(p, a)$  und  $\delta(q, a)$  unterscheidbar, dann auch  $p$  und  $q$ .  
 $\Rightarrow$  Unterscheidbarkeit pflanzt sich rückwärts fort.

## Berechnung äquivalenter Zustände eines DFA

Eingabe: DFA  $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

Ausgabe: Äquivalenzrelation auf  $Q$ .

Datenstruktur: Eine Menge  $U$  ungeordneter Paare  $\{p, q\} \subseteq Q$ .

Algorithmus U:

- 1  $U := \{\{p, q\} \mid p \in F \wedge q \notin F\}$
- 2 **while**  $\exists \{p, q\} \notin U. \exists a \in \Sigma. \{\delta(p, a), \delta(q, a)\} \in U$   
**do**  $U := U \cup \{\{p, q\}\}$

Invariante:  $\{p, q\} \in U \implies p$  und  $q$  unterscheidbar

### Lemma 3.51

*Am Ende gilt:  $U$  ist Menge aller unterscheidbaren Zustandspaare.*

### Beweis:

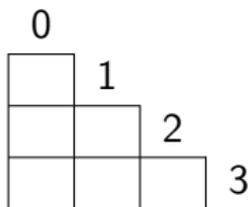
$\{p, q\} \in U \implies p$  und  $q$  unterscheidbar:

Invariante  $p$  und  $q$  unterscheidbar  $\implies \{p, q\} \in U$ :

Induktion über die Länge eines unterscheidenden Worts. □

Implementierung von  $U$ :

Tabelle von anfangs unmarkierten Paaren  $\{p, q\}$ ,  $p \neq q$ .



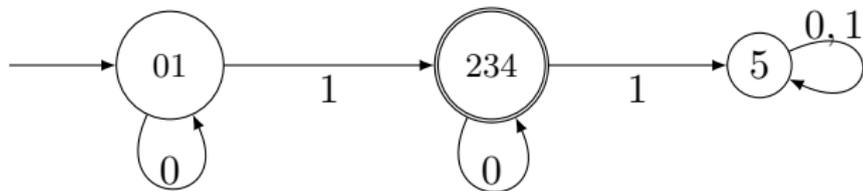
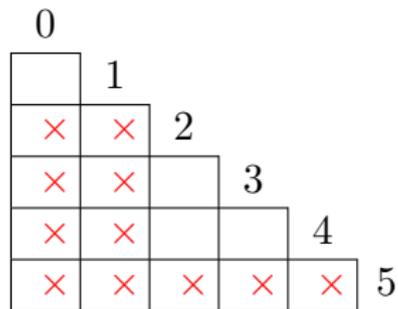
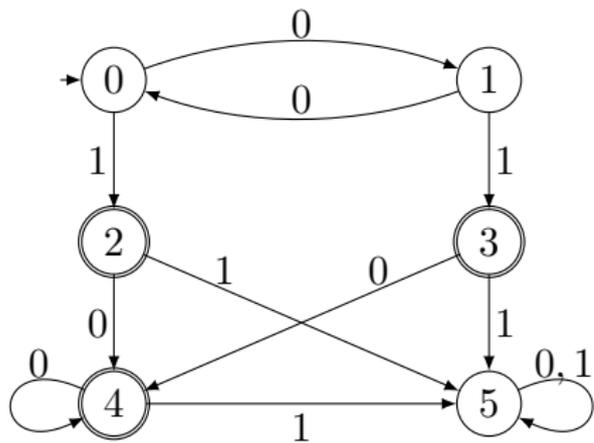
**for all**  $p \in F$ ,  $q \in Q \setminus F$  **do** markiere  $\{p, q\}$   
**while**  $\exists$  unmarkiertes  $\{p, q\} \exists a \in \Sigma$ .  $\{\delta(p, a), \delta(q, a)\}$  ist markiert  
**do** markiere  $\{p, q\}$

Komplexität:

$$O\left(\binom{n}{2} + \binom{n}{2} \binom{n}{2} |\Sigma|\right) = O\left(\frac{n(n-1)}{2} + \frac{n^2(n-1)^2}{4} |\Sigma|\right) = O(n^4)$$

bei fixem  $\Sigma$ .

## Beispiel 3.52



Von  $O(n^4)$  zu  $O(n^2)$  mit Abhängigkeitsanalyse:

$\{p', q'\}$  unterscheidbar  $\implies$   
 $\{p, q\}$  unterscheidbar falls  $\{p, q\} \xrightarrow{a} \{p', q'\}$

$D[\{p', q'\}]$  : Menge der Paare  $\{p, q\}$  wie oben, anfangs leer

**for all**  $\{p, q\} \subseteq Q$  mit  $p \neq q$ ,  $a \in \Sigma$  **do**

$p' := \delta(p, a)$ ;  $q' := \delta(q, a)$

**if**  $p' \neq q'$  **then**  $D[\{p', q'\}] := D[\{p', q'\}] \cup \{\{p, q\}\}$

**for all**  $p' \in F$ ,  $q' \in Q \setminus F$  **do**  $mark(\{p', q'\})$

$mark(\{p', q'\}) =$

**if**  $\{p', q'\}$  unmarkiert **then**

markiere  $\{p', q'\}$

**for all**  $\{p, q\} \in D[\{p', q'\}]$  **do**  $mark(\{p, q\})$

Komplexität:  $O(n^2 + n^2) = O(n^2)$ .



John Hopcroft.

*An  $n \log n$  Algorithm for Minimizing the States in a Finite Automaton.* 1971.

Eine weitere Anwendung: Äquivalenztest von DFAs.

- 1 Gegeben DFAs  $M_1$  und  $M_2$ , bilde disjunkte Vereinigung. („Male  $M_1$  und  $M_2$  nebeneinander.“)
- 2 Berechne Menge der äquivalenten Zustände.
- 3  $L(M_1) = L(M_2)$  gdw die beiden Startzustände äquivalent sind.

**Bisher:** Der Minimierungsalgorithmus (zur Erinnerung).

- 1 Entferne alle von  $q_0$  aus nicht erreichbaren Zustände.
- 2 Berechne die *äquivalenten* Zustände des Automaten.
- 3 Kollabiere den Automaten durch Zusammenfassung aller äquivalenten Zustände.

## Formale Definition des “kollabierten Automaten”

Eine Relation  $\approx \subseteq A \times A$  ist eine **Äquivalenzrelation** falls

- Reflexivität:  $\forall a \in A. a \approx a$
- Symmetrie:  $\forall a, b \in A. a \approx b \implies b \approx a$
- Transitivität:  $\forall a, b, c \in A. a \approx b \wedge b \approx c \implies a \approx c$

**Äquivalenzklasse:**

$$[a]_{\approx} := \{b \mid a \approx b\}$$

Es gilt:

$$[a]_{\approx} = [b]_{\approx} \iff a \approx b$$

**Quotientenmenge:**

$$A/\approx := \{[a]_{\approx} \mid a \in A\}$$

Im Folgenden sei  $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$  ein DFA ohne unerreichbare Zustände und sei  $L = L(M)$ .

Die Sprache des Zustands  $q \in Q$  ist die Menge

$$L_M(q) := \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q, w) \in F\} .$$

**Definition 3.53** (Äquivalenz von Zuständen eines DFAs)

$$p \equiv_M q \quad \Leftrightarrow \quad L_M(p) = L_M(q)$$

(Intuition: *Zwei Zustände sind äquivalent wenn sie die gleiche Sprache erkennen.*)

**Fakt:**  $\equiv_M$  ist eine Äquivalenzrelation und die Anzahl der Äquivalenzklassen von  $\equiv_M$  (d.h.  $|Q/\equiv_M|$ ) ist die Anzahl der Sprachen, die von den Zuständen von  $M$  erkannt werden.

Wir schreiben  $\equiv$  statt  $\equiv_M$  wenn  $M$  klar ist.

Die „Kollabierung“ von  $M$  bzgl.  $\equiv$  ist der *Quotientenautomat*:

### Definition 3.54 (Quotientenautomat)

$$\begin{aligned}M/\equiv & := (Q/\equiv, \Sigma, \delta', [q_0]_{\equiv}, F/\equiv) \\ \delta'([p]_{\equiv}, a) & := [\delta(p, a)]_{\equiv}\end{aligned}$$

Die Definition von  $\delta'$  ist wohlgeformt da unabhängig von der Wahl des Repräsentanten  $p$ :

$$\begin{aligned}[p]_{\equiv} = [p']_{\equiv} & \implies p \equiv p' \implies \delta(p, a) \equiv \delta(p', a) \\ & \implies [\delta(p, a)]_{\equiv} = [\delta(p', a)]_{\equiv}\end{aligned}$$

### Lemma 3.55

$M$  und  $M/\equiv$  erkennen die gleiche Sprache:  $L(M/\equiv) = L(M)$ .

Beweis: Übung.

# Minimalität des Quotientenautomaten

Die Residualsprache von  $L$  bzgl.  $w \in \Sigma^*$  ist die Menge

$$L^w := \{z \in \Sigma^* \mid wz \in L\} .$$

$L' \subseteq \Sigma^*$  ist Residualsprache von  $L$  wenn es  $w$  gibt mit  $L' = L^w$ .

**Definition 3.56** (Äquivalenz von Wörtern bzgl.  $L$ )

$$u \equiv_L v \iff L^u = L^v$$

(Intuition: *Zwei Wörter sind äquivalent wenn sie die gleiche Residualsprache haben.*)

**Fakt:**  $\equiv_L$  ist eine Äquivalenzrelation und die Anzahl der Äquivalenzklassen von  $\equiv_L$  (d.h.  $|\Sigma^*/\equiv_L|$ ) ist die Anzahl der Residualsprachen von  $L$  (kann unendlich sein!).

## Erste Beobachtung

Sei  $p := \hat{\delta}(q_0, u)$  und  $q := \hat{\delta}(q_0, v)$ . Es gilt:

$$\begin{aligned} p \equiv_M q &\Leftrightarrow L_M(p) = L_M(q) \\ &\Leftrightarrow \forall w \in \Sigma^*. \hat{\delta}(p, w) \in F \Leftrightarrow \hat{\delta}(q, w) \in F \\ &\Leftrightarrow \hat{\delta}(q_0, uw) \in F \Leftrightarrow \hat{\delta}(q_0, vw) \in F \\ &\Leftrightarrow \forall w \in \Sigma^*. uw \in L \Leftrightarrow vw \in L \\ &\Leftrightarrow \forall w \in \Sigma^*. w \in L^u \Leftrightarrow w \in L^v \\ &\Leftrightarrow L^u = L^v \\ &\Leftrightarrow u \equiv_L v \end{aligned}$$

Intuition:

- *Nicht-äquivalente Wörter führen zu nicht-äquivalenten Zuständen.*
- *Nicht-äquivalente Zustände werden von nicht-äquivalenten Wörtern erreicht.*

## Zweite Beobachtung

Nicht-äquivalente Wörter führen zu nicht-äquivalenten Zuständen und alle Zustände von  $M$  sind erreichbar  $\implies |Q/\equiv_M| \geq |\Sigma^*/\equiv_L|$

Nicht-äquivalente Zustände werden nur von nicht-äquivalenten Wörtern erreicht  $\implies |Q/\equiv_M| \leq |\Sigma^*/\equiv_L|$

Damit:  $|Q/\equiv_M| = |\Sigma^*/\equiv_L|$

### Satz 3.57

*Sei  $M$  ein DFA ohne unerreichbare Zustände. Der Quotientenautomat  $M/\equiv$  ist ein minimaler DFA für  $L(M)$ .*

#### Beweis:

Sei  $M'$  ein beliebiger DFA für  $L(M)$ . Es gilt:

$$|Q'| \geq |Q'/\equiv_{M'}| = |\Sigma^*/\equiv_L| = |Q/\equiv_M| = |\text{Zustände von } M/\equiv|$$



Sei  $\mathcal{R}_L$  die Menge der Residualsprachen von  $L$ .

### Definition 3.58 (Kanonischer Minimalautomat)

$$M_L := (\mathcal{R}_L, \Sigma, \delta_L, L, F_L)$$

mit  $\delta_L(R, a) := R^a$  und  $F_L := \{R \in \mathcal{R}_L \mid \epsilon \in R\}$ .

$\delta_L$  ist wohldefiniert und  $\hat{\delta}_L(R, w) = R^w$ . Jeder Zustand  $R$  erkennt die Sprache  $R$  und somit  $L(M_L) = L$ .

### Satz 3.59

*Jeder minimaler DFA für eine reguläre Sprache  $L$  unterscheidet sich vom kanonischen Minimalautomaten  $M_L$  nur durch eine Umbenennung der Zustände.*

### Beweis:

(Skizze.) Sei  $M$  minimaler DFA für  $L$ . Jeder Zustand von  $M$  erkennt eine andere Residualsprache von  $L$ . Das gleiche gilt für  $M_L$ . Die Bijektion, die jedem Zustand von  $M$  den Zustand von  $M_L$  mit der selben Sprache zuordnet, ist die gesuchte Umbenennung. □

### Satz 3.60

*Eine Sprache  $L \subseteq \Sigma^*$  ist genau dann regulär, wenn sie endlich viele Residualsprachen hat.*

#### Beweis:

„ $\implies$ “: Ist  $L$  regulär, so wird  $L$  von einem DFA  $M$  akzeptiert.

Daher hat  $L$  so viele Residualsprachen wie  $M/\equiv_M$  Zustände.

„ $\impliedby$ “: Hat  $L$  endlich viele Residualsprachen, so ist  $M_L$  ein DFA mit  $L(M_L) = L$ . □



## **Bemerkung**

Eindeutigkeit des minimalen Automaten (modulo Umbenennung der Zustände) gilt nur bei DFAs, nicht bei NFAs!

Aufgabe: Finde Gegenbeispiel für NFAs

## Rückblick reguläre Sprachen

- DFA, NFA,  $\epsilon$ -NFA und RE definieren die gleiche Sprachklasse.
  - Potenzmengenkonstruktion (exponentiell)
  - Strukturelle Übersetzung von RE nach  $\epsilon$ -NFA
  - Übersetzung NFA nach RE, zB über Gleichungssysteme (exponentiell)
- Regularitätserhaltende Konstruktionen auf Sprachen bzw Automaten:
  - $\cup, \cap, \dots, R, \dots$
  - Für welche Darstellung wie teuer?  
(Komplement, Produkt, ...)
  - NFA kompakt aber oft teuer; DFA oft billiger
- Entscheidungsprobleme auf Automaten und REs:
  - Direkt entscheidbar?  
Auf Automat? (Oft mit Erreichbarkeit) Auf RE?
  - Reduzierbar auf anderes Problem?  
ZB  $L(A) \subseteq L(B)$  auf  $L(A) \cap \overline{L(B)} = \emptyset$
  - Für welche Darstellung wie teuer?

- Pumping-Lemma
- Äquivalenzen  $\equiv$  zw REs:
  - Standardregeln: Kommutativität etc, Beweis mit  $L(\cdot)$
  - $\alpha \equiv \beta$  entscheidbar da  $L(\alpha) = L(\beta)$  über Automaten entscheidbar
  - Auch für REs mit Variablen entscheidbar: betrachte Variablen als Konstanten
  - Gleichungssysteme lösbar durch Variablenelimination mit Ardens Lemma
- Minimierung
  - Algorithmen zur Kollabierung
  - Relationen  $\equiv_M$  und  $\equiv_L$
  - Quotientenautomat  $M/\equiv_M$  minimal, da gleich groß wie kanonischer minimaler Automat  $M_{L(M)}$
  - $L$  genau dann regulär wenn sie endlich viele Residualsprachen hat.

## 4. Kontextfreie Sprachen

### 4.1 Kontextfreie Grammatiken

#### Beispiel 4.1 (Arithmetische Ausdrücke)

$\langle \text{Expr} \rangle \rightarrow \langle \text{Term} \rangle$

$\langle \text{Expr} \rangle \rightarrow \langle \text{Expr} \rangle + \langle \text{Term} \rangle$

$\langle \text{Term} \rangle \rightarrow \langle \text{Factor} \rangle$

$\langle \text{Term} \rangle \rightarrow \langle \text{Term} \rangle * \langle \text{Factor} \rangle$

$\langle \text{Factor} \rangle \rightarrow a$

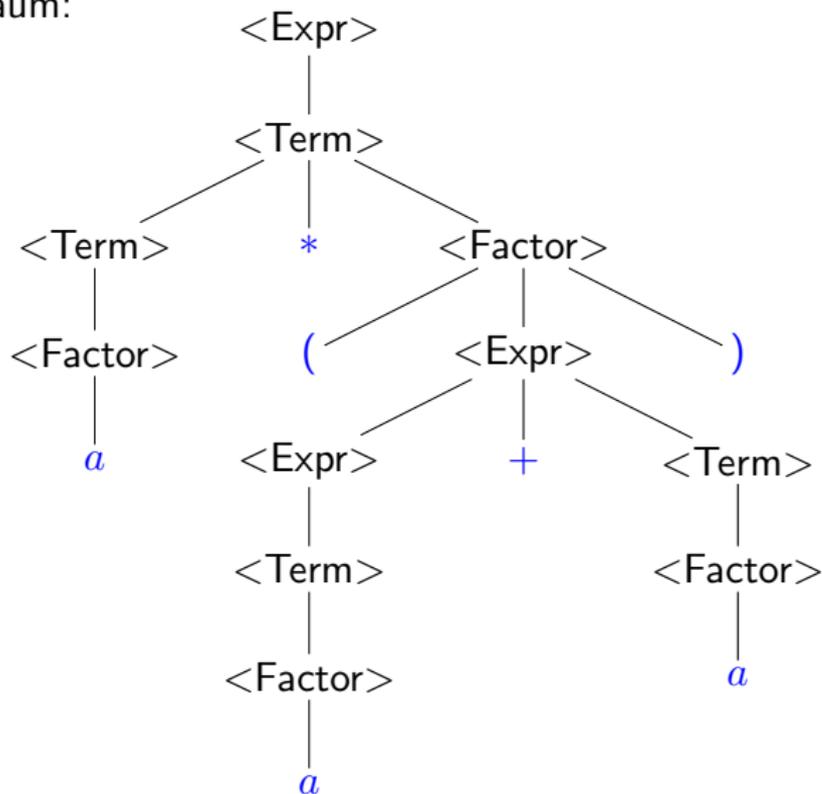
$\langle \text{Factor} \rangle \rightarrow (\langle \text{Expr} \rangle)$

Eine (Links)Ableitung:

$\langle \text{Expr} \rangle \rightarrow$

$\rightarrow a * (a + a)$

Der Syntaxbaum:



Die Blätter des Baums, von links nach rechts gelesen,  
ergeben das abgeleitete Wort

## Bemerkungen

- Der vollständige Syntaxbaum enthält die gesamte Information über die Ableitung, bis auf die (irrelevante) Reihenfolge des Aufbaus.
- Kontextfreie Grammatiken dienen zur Spezifikation von Sprachen. Das **Parsen** ist:
  - Die Überprüfung, ob ein Wort von einer Grammatik abgeleitet werden kann, bzw
  - Die Erzeugung des Syntaxbaums (*parse tree*).

Parsen ist die Transformation eines Worts in einen Syntaxbaum.

## Definition 4.2

Eine **kontextfreie Grammatik**  $G = (V, \Sigma, P, S)$  ist ein 4-Tupel:

$V$  ist eine endliche Menge von **Nichtterminalzeichen**  
(oder **Variablen**),

$\Sigma$  ist ein Alphabet von **Terminalzeichen**, disjunkt von  $V$ ,

$P \subseteq V \times (V \cup \Sigma)^*$  ist eine endliche Menge von **Produktionen** und

$S \in V$  ist das **Startsymbol**.

Konventionen:

- $A, B, C, \dots$  sind Nichtterminale,
- $a, b, c, \dots$  (und Sonderzeichen wie  $+, *, \dots$ ) sind Terminale,
- $\alpha, \beta, \gamma, \dots \in (V \cup \Sigma)^*$
- Produktionen schreiben wir  $A \rightarrow \alpha$  statt  $(A, \alpha) \in P$ .
- Statt  $A \rightarrow \alpha_1, A \rightarrow \alpha_2, A \rightarrow \alpha_3$  schreiben wir einfach

$$A \rightarrow \alpha_1 \mid \alpha_2 \mid \alpha_3$$

### Beispiel 4.3 (Arithmetische Ausdrücke)

$$V = \{E, T, F\}$$

$$\Sigma = \{a, +, *, (, )\}$$

$$P =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E \rightarrow T \mid E + T \\ T \rightarrow F \mid T * F \\ F \rightarrow a \mid (E) \end{array} \right\}$$

$$S = E$$

## Definition 4.4

Eine kontextfreie Grammatik  $G = (V, \Sigma, P, S)$  induziert eine **Ableitungsrelation**  $\rightarrow_G$  auf Wörtern über  $V \cup \Sigma$ :

$$\alpha \rightarrow_G \beta$$

gdw es eine Regel  $A \rightarrow \gamma$  in  $P$  gibt, und Wörter  $\alpha_1, \alpha_2$ , so dass

$$\alpha = \alpha_1 A \alpha_2 \quad \text{und} \quad \beta = \alpha_1 \gamma \alpha_2$$

Beispiel:

$$a + T + a \quad \rightarrow_G \quad a + T * F + a$$

## Definition 4.5 (Reflexive transitive Hülle)

$$\alpha \rightarrow_G^0 \alpha$$

$$\alpha \rightarrow_G^{n+1} \gamma \quad :\Leftrightarrow \quad \exists \beta. \alpha \rightarrow_G^n \beta \rightarrow_G \gamma$$

$$\alpha \rightarrow_G^* \beta \quad :\Leftrightarrow \quad \exists n. \alpha \rightarrow_G^n \beta$$

$$\alpha \rightarrow_G^+ \beta \quad :\Leftrightarrow \quad \exists n > 0. \alpha \rightarrow_G^n \beta$$

Beispiel:  $E \rightarrow_G^{11} a * (a + a)$  und daher  $E \rightarrow_G^* a * (a + a)$ .

Wir nennen

$$\alpha_1 \rightarrow_G \alpha_2 \rightarrow_G \cdots \rightarrow_G \alpha_n$$

eine **Linksableitung** gdw in jedem Schritt das linkeste Nichtterminal in  $\alpha_i$  ersetzt wird.

## Definition 4.6 (Kontextfreie Sprache)

Eine kontextfreie Grammatik  $G = (V, \Sigma, P, S)$  erzeugt die Sprache

$$L(G) := \{w \in \Sigma^* \mid S \rightarrow_G^* w\}$$

Eine Sprache  $L \subseteq \Sigma^*$  heißt **kontextfrei** gdw es eine kontextfreie Grammatik  $G$  gibt mit  $L = L(G)$ .

### Abkürzungen:

**CFG** Kontextfreie Grammatik (*context-free grammar*)

**CFL** Kontextfreie Sprache (*context-free language*)

### Konvention:

Ist  $G$  aus dem Kontext eindeutig ersichtlich, so schreibt man auch nur  $\alpha \rightarrow \beta$  statt  $\alpha \rightarrow_G \beta$ .

## Beispiel 4.7

Die nicht-reguläre Sprache  $L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$  ist kontextfrei, da sie von der CFG

$$S \rightarrow aSb \mid \epsilon$$

erzeugt wird. Genauer:  $L = L(G)$  wobei  $G = (V, \Sigma, P, S)$  mit

$$V = \{S\}$$

$$\Sigma = \{a, b\}$$

$$P = \{S \rightarrow aSb \mid \epsilon\}$$

Der unendliche Baum aller möglichen (Links-)Ableitungen:

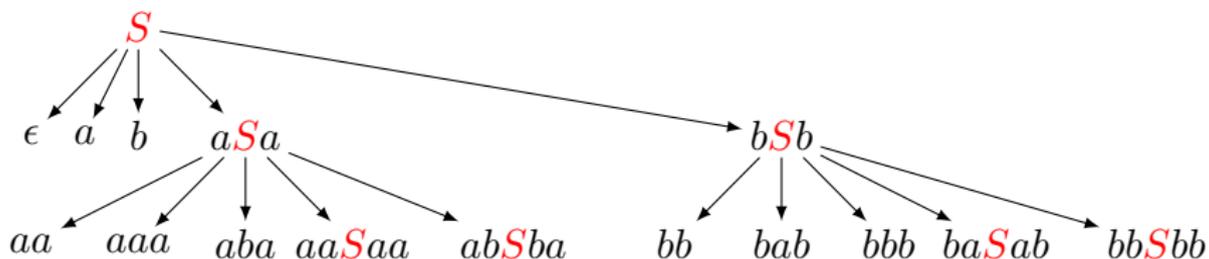
$$\begin{array}{ccccccc} S & \rightarrow & aSb & \rightarrow & a^2Sb^2 & \rightarrow & a^3Sb^3 & \rightarrow & \dots \\ & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\ & & \epsilon & & ab & & a^2b^2 & & a^3b^3 \end{array}$$

## Beispiel 4.8

Die nicht-reguläre Sprache der Palindrome ( $w = w^R$ ) über  $\{a, b\}$  wird von folgender CFG erzeugt:

$$S \rightarrow \epsilon \mid a \mid b \mid aSa \mid bSb$$

Der Anfang des unendlichen Baums aller (Links-)Ableitungen (Achtung, dies ist *kein* Syntaxbaum!):



## 4.2 Induktive Definitionen, Syntaxbäume und Ableitungen

- 1 Beispiel: Balancierte Klammern
- 2 Induktive Definitionen und Syntaxbäume allgemein
- 3 Äquivalenz von Ableitung, Syntaxbaum und induktiver Erzeugung

## Beispiel 4.9

$$S \rightarrow \epsilon \mid [S] \mid SS$$

Um zu zeigen, dass diese Grammatik die Menge aller balancierten Klammerwörter in  $\{[, ]\}^*$  erzeugt, betrachten wir die Grammatik als induktive Definition einer Sprache  $L_G(S)$ :

	$\epsilon \in L_G(S)$
$u \in L_G(S)$	$\implies [u] \in L_G(S)$
$u \in L_G(S) \wedge v \in L_G(S)$	$\implies uv \in L_G(S)$

Damit gilt zB:

$$\begin{aligned} \epsilon \in L_G(S) &\implies [] \in L_G(S) \implies [[]] \in L_G(S) \\ &\implies [[]] [] \in L_G(S) \end{aligned}$$

## Bemerkungen

- Die Produktionen ( $\rightarrow$ ) erzeugen Wörter *top-down*, d.h. von einem Nichtterminal zu einem Wort hin.
- Die induktive Definition ( $\Rightarrow$ ) erzeugt Wörter *bottom-up*, d.h. sie setzt kleinere Wörter zu größeren zusammen.
- Die induktive Definition betrachtet nur Wörter aus  $\Sigma^*$ .

Zur induktiven Definition von  $L_G(S)$  gehört ein Induktionsprinzip:

Um zu zeigen, dass für alle  $u \in L_G(S)$  eine Eigenschaft  $P(u)$  gilt, dh  $\forall u \in L_G(S). P(u)$ , zeige:

		$P(\epsilon)$
	$P(u)$	$\implies P([u])$
	$P(u) \wedge P(v)$	$\implies P(uv)$

„Induktion über die Erzeugung von  $u$ “

### Lemma 4.10

*Alle  $u \in L_G(S)$  enthalten gleich viele [ wie ].*

**Beweis:**

Mit Induktion über die Erzeugung von  $u$ :

- $\epsilon$  enthält 0 [ und ].
- Enthält  $u$  gleich viele [ wie ], so auch  $[u]$ .
- Enthalten  $u$  und  $v$  gleich viele [ wie ], so auch  $uv$ .



## Definition 4.11 (Balancierte Klammerausdrücke)

Präfix:

$$u \preceq w \quad :\Leftrightarrow \quad \exists v. uv = w$$

Anzahl der Vorkommen:

$$\#_a(w) := \text{Anzahl der Vorkommen von } a \text{ in } w$$

Seien:

$$A(w) := \#_[(w) \quad B(w) := \#_](w)$$

Wir nennen  $w \in \{[, ]\}^*$  **balanciert** gdw

(1)  $A(w) = B(w)$  und

(2) für alle Präfixe  $u$  von  $w$  gilt  $A(u) \geq B(u)$

- Balanciert: [], [[]], [] [], [[] []] []
- Nicht balanciert: ] [, []] [[]

## Satz 4.12

Die Grammatik  $S \rightarrow \epsilon \mid [S] \mid SS$  erzeugt genau die Menge der balancierten Wörter.

### Beweis:

$u \in L_G(S) \implies u$  balanciert:

Mit Ind. über die Erzeugung von  $u$ . (1) bewiesen, wir zeigen (2).

$\epsilon$ :  $p \preceq \epsilon \implies p = \epsilon \implies A(p) = B(p)$

$[u]$ : Sei  $p \preceq [u]$

Fall  $p = \epsilon$ :  $A(p) = B(p)$

Fall  $p = [u]$ :  $A(p) = A(u) + 1 = B(u) + 1 = B(p)$

Fall  $p = [q]$  mit  $q \preceq u$ :

$A(p) = A(q) + 1 \geq B(q) + 1 > B(q) = B(p)$

$uv$ : Sei  $p \preceq uv$ .

Fall  $p \preceq u$ :  $A(p) \geq B(p)$  mit IA für  $u$

Fall  $p = uq$  und  $q \preceq v$ :

$A(p) = A(u) + A(q) = B(u) + A(q) \geq B(u) + B(q) = B(uq) = B(p)$

## Beweis (Forts.)

$u$  balanciert  $\implies u \in L_G(S)$ :

Mit vollständiger Induktion über  $n := |u|$ . (dh  $u = a_1 \dots a_n$ )

IA: Jedes balancierte Wort  $< n$  liegt in  $L_G(S)$ .

Zz:  $u \in L_G(S)$ .

Falls  $n = 0$ , so  $u = \epsilon \in L_G(S)$ .

Sei  $n > 0$ .

Betrachte Werteverlauf von  $h(w) := A(w) - B(w)$ :

$h(\epsilon), h(a_1), h(a_1 a_2), \dots, h(a_1 \dots a_n)$  (alle  $\geq 0!$ ).

Insb. gilt  $a_1 = [$  und  $a_n = ]$ . Wir betrachten zwei Fälle:

- Es gibt nur die Nullstellen  $h(\epsilon)$  und  $h(a_1 \dots a_n)$ .

Dann ist  $v := a_2 \dots a_{n-1}$  balanciert:

$$(1) A(v) = A([v]) - 1 = B([v]) - 1 = B(v)$$

$$(2) p \preceq v: h([p]) = A([p]) - B([p]) > 0 \implies$$

$$A(p) = A([p]) - 1 > B([p]) - 1 = B(p) - 1 \implies$$

$$A(p) \geq B(p)$$

$$\implies v \in L_G(S) \text{ (nach IA)} \implies u = [v] \in L_G(S)$$

## Beweis (Forts.):

- Es gibt noch eine Nullstelle  $h(a_1 \dots a_k)$ .

Sei  $u_1 := a_1 \dots a_k$ ,  $u_2 := a_{k+1} \dots a_n$

Dann sind  $u_1$  und  $u_2$  balanciert:

(1)  $A(u_1) = B(u_1)$  da  $h(u_1) = 0$ ;

$$A(u_2) = A(u) - A(u_1) = B(u) - B(u_1) = B(u_2)$$

(2)  $p \preceq u_1 \implies p \preceq u \implies A(p) \geq B(p)$

$$p \preceq u_2: A(p) = A(u_1 p) - A(u_1) \geq B(u_1 p) - B(u_1) = B(p)$$

$\implies u_1, u_2 \in L_G(S)$  (nach IA, da  $|u_i| < n$ )

$\implies u = u_1 u_2 \in L_G(S)$



## Moral:

- „ $w \in L_G(S) \implies P(w)$ “ beweist man immer schematisch mit Induktion über die Erzeugung von  $w$ .
- „ $P(w) \implies w \in L_G(S)$ “ beweist man oft mit Induktion über  $|w|$ . Erfordert meist Kreativität.

Wir übertragen die Idee der induktiven Erzeugung auf beliebige CFGs  $G = (V, \Sigma, P, S)$ . Sei  $V = \{A_1, \dots, A_k\}$ . Damit ist jede Produktion von der Form

$$A_i \rightarrow w_0 A_{i_1} w_1 \dots w_{n-1} A_{i_n} w_n$$

Man kann  $G$  als eine (simultane) induktive Definition von Sprachen  $L_G(A_i)$  für all  $A_i \in V$  sehen. Jede Produktion korrespondiert zu einer Erzeugungsregel

$$u_1 \in L_G(A_{i_1}) \wedge \dots \wedge u_n \in L_G(A_{i_n}) \implies w_0 u_1 w_1 \dots u_n w_n \in L_G(A_i)$$

Aussagen der Form

$$(u \in L_G(A_1) \implies P_1(u)) \wedge \dots \wedge (u \in L_G(A_k) \implies P_k(u))$$

werden durch **simultane Induktion über die Erzeugung von  $u$**  bewiesen, indem man für jede Produktion zeigt:

$$P_{i_1}(u_1) \wedge \dots \wedge P_{i_n}(u_n) \implies P_i(w_0 u_1 w_1 \dots w_{n-1} u_n w_n)$$

## Beispiel 4.13

Grammatik:

$$A \rightarrow \epsilon \mid aB \quad B \rightarrow Aa$$

Induktive Definition:

- $\epsilon \in L_G(A)$
- $w \in L_G(B) \implies aw \in L_G(A)$
- $w \in L_G(A) \implies wa \in L_G(B)$

Beim induktiven Beweis von

$$\begin{aligned} & (w \in L_G(A) \implies \#_a(w) \text{ ist gerade}) \wedge \\ & (w \in L_G(B) \implies \#_a(w) \text{ ist ungerade}) \end{aligned}$$

muss man zeigen

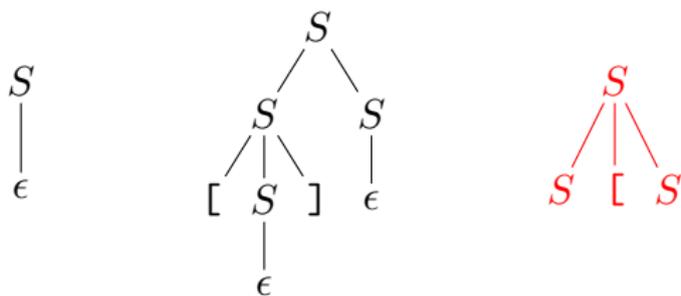
- $\#_a(\epsilon)$  ist gerade
- $\#_a(w)$  ist ungerade  $\implies \#_a(aw)$  ist gerade
- $\#_a(w)$  ist gerade  $\implies \#_a(wa)$  ist ungerade

## Definition 4.14 (Syntaxbaum)

Ein **Syntaxbaum** für eine Ableitung mit einer Grammatik  $G = (V, \Sigma, P, S)$  ist ein Baum, so dass

- jedes Blatt mit einem Zeichen aus  $\Sigma \cup \{\epsilon\}$  beschriftet ist,
- jeder innere Knoten mit einem  $A \in V$  beschriftet ist, und falls die Nachfolger (von links nach rechts) mit  $X_1, \dots, X_n \in V \cup \Sigma \cup \{\epsilon\}$  beschriftet sind, dann ist  $A \rightarrow X_1 \dots X_n$  eine Produktion in  $P$ ,
- ein Blatt  $\epsilon$  der einzige Nachfolger seines Vorgängers ist.

## Beispiel 4.15 (Syntaxbäume für $S \rightarrow \epsilon \mid [S] \mid SS$ )



## Satz 4.16

Für eine CFG und ein  $w \in \Sigma^*$  sind folgende Bedingungen äquivalent:

- 1  $A \rightarrow_G^* w$
- 2  $w \in L_G(A)$  (gemäß der induktiven Definition)
- 3 Es gibt einen Syntaxbaum mit Wurzel  $A$ , dessen *Rand* (Blätter von links nach rechts gelesen) das Wort  $w$  ist.

## Definition 4.17

- Eine CFG  $G$  heißt **mehrdeutig** gdw es ein  $w \in L(G)$  gibt, das zwei verschiedene Syntaxbäume hat, also zwei verschiedene Syntaxbäume mit Wurzel  $S$  und Rand  $w$ .
- Eine CFL  $L$  heißt **inhärent mehrdeutig** gdw jede CFG  $G$  mit  $L(G) = L$  mehrdeutig ist.

## Beispiel 4.18

Die Grammatik  $E \rightarrow E + E \mid E * E \mid (E) \mid a$  ist mehrdeutig — betrachte  $a + a * a$ . Die erzeugte Sprache ist aber nicht inhärent mehrdeutig (siehe Beispiel Arithmetische Ausdrücke).

## Satz 4.19

Die Sprache  $\{a^i b^j c^k \mid i = j \vee j = k\}$  ist inhärent mehrdeutig.

## 4.3 Die Chomsky-Normalform

### Definition 4.20

Eine kontextfreie Grammatik  $G$  ist in **Chomsky-Normalform** gdw alle Produktionen eine der Formen

$$A \rightarrow a \quad \text{oder} \quad A \rightarrow BC$$

haben.

Wir konstruieren und beweisen nun schrittweise:

### Satz 4.21

*Zu jeder CFG  $G$  kann man eine CFG  $G'$  in Chomsky-Normalform konstruieren mit  $L(G') = L(G) \setminus \{\epsilon\}$ .*

Wir nennen  $A \rightarrow \epsilon$  eine  $\epsilon$ -Produktion.

### Lemma 4.22

Zu jeder CFG  $G = (V, \Sigma, P, S)$  kann man eine CFG  $G'$  konstruieren, die keine  $\epsilon$ -Produktionen enthält, so dass gilt  $L(G') = L(G) \setminus \{\epsilon\}$

### Beweis:

Wir erweitern  $P$  induktiv zu eine Obermenge  $\hat{P}$ :

- 1 Jede Produktion aus  $P$  ist in  $\hat{P}$
- 2 Sind  $B \rightarrow \epsilon$  und  $A \rightarrow \alpha B \beta$  in  $\hat{P}$ , so füge auch  $A \rightarrow \alpha \beta$  hinzu.

Offensichtlich gilt  $L(\hat{G}) = L(G)$ : Jede neue Produktion kann von 2 alten simuliert werden.

Wir definieren  $G'$  als  $\hat{G}$  ohne die  $\epsilon$ -Produktionen.

Denn diese sind nun überflüssig:

## Beweis (Forts.):

Sei  $S \rightarrow_{\hat{G}}^* w$ ,  $w \neq \epsilon$ , eine Ableitung minimaler Länge.  
Käme darin  $B \rightarrow \epsilon$  vor, also

$$S \rightarrow_{\hat{G}}^* \gamma B \delta \rightarrow_{\hat{G}} \gamma \delta \rightarrow_{\hat{G}}^* w$$

so wäre  $\gamma$  oder  $\delta$  nichtleer, dh  $B$  muss durch eine Produktion  
 $A \rightarrow \alpha B \beta$  eingeführt worden sein:

$$S \rightarrow_{\hat{G}}^k \alpha' A \beta' \rightarrow_{\hat{G}} \alpha' \alpha B \beta \beta' \rightarrow_{\hat{G}}^m \gamma B \delta \rightarrow_{\hat{G}} \gamma \delta \rightarrow_{\hat{G}}^n w$$

Dann wäre aber folgende Ableitung mit  $(A \rightarrow \alpha \beta) \in \hat{P}$  kürzer:

$$S \rightarrow_{\hat{G}}^k \alpha' A \beta' \rightarrow_{\hat{G}} \alpha' \alpha \beta \beta' \rightarrow_{\hat{G}}^m \gamma \delta \rightarrow_{\hat{G}}^n w$$

Also kommen in Ableitungen minimaler Länge keine  
 $\epsilon$ -Produktionen vor. Letztere sind also überflüssig. □

### Beispiel 4.23

$$S \rightarrow AB, \quad A \rightarrow aAA \mid B, \quad B \rightarrow bBS \mid \epsilon$$

Wir nennen  $A \rightarrow B$  eine Kettenproduktion.

### Lemma 4.24

*Zu jeder CFG  $G = (V, \Sigma, P, S)$  kann man eine CFG  $G'$  konstruieren, die keine Kettenproduktionen enthält, so dass gilt  $L(G') = L(G)$ .*

### Beweis:

Wir erweitern  $P$  induktiv zu eine Obermenge  $\hat{P}$ :

- 1 Jede Produktion aus  $P$  ist in  $\hat{P}$
- 2 Sind  $A \rightarrow B$  und  $B \rightarrow \alpha$  in  $\hat{P}$  mit  $\alpha \neq A$ ,  
so füge auch  $A \rightarrow \alpha$  hinzu.

Das Ergebnis  $G'$  ist  $\hat{G}$  ohne die (nun überflüssigen) Kettenproduktionen.

Rest des Beweises analog zur Elimination von  $\epsilon$ -Produktionen. □

### Beispiel 4.25

$$A \rightarrow a \mid B, \quad B \rightarrow b \mid C \mid aBB, \quad C \rightarrow A \mid AB$$

## Konstruktion einer Chomsky-Normalform

Eingabe: Eine kontextfreie Grammatik  $G = (V, \Sigma, P, S)$

- 1 Füge für jedes  $a \in \Sigma$ , das in einer rechten Seite der Länge  $\geq 2$  vorkommt, ein neues Nichtterminal  $A_a$  zu  $V$  hinzu, ersetze  $a$  in allen rechten Seiten der Länge  $\geq 2$  durch  $A_a$ , und füge  $A_a \rightarrow a$  zu  $P$  hinzu.
- 2 Ersetze jede Produktion der Form

$$A \rightarrow B_1 B_2 \cdots B_k \quad (k \geq 3)$$

durch

$$A \rightarrow B_1 C_2, \quad C_2 \rightarrow B_2 C_3, \quad \dots, \quad C_{k-1} \rightarrow B_{k-1} B_k$$

wobei  $C_2, \dots, C_{k-1}$  neue Nichtterminale sind.

- 3 Eliminiere alle  $\epsilon$ -Produktionen.
- 4 Eliminiere alle Kettenproduktionen.

## Aufgabe:

- Zeige: Mit diesem Algorithmus ist das Ergebnis höchstens quadratisch größer als  $G$ .
- Zeige: die Reihenfolge der Schritte ist wichtig!
  - Finde eine andere Reihenfolge, die inkorrekt ist: Das resultierende Verfahren ergibt nicht immer eine Grammatik in CNF.
  - Finde eine andere Reihenfolge, die zwar zu einem korrekten Verfahren führt, aber eine Grammatik in CNF produzieren kann, die exponentiell größer als  $G$  ist.

### Definition 4.26

Eine CFG ist in **Greibach-Normalform** (benannt nach Sheila Greibach, UCLA), falls jede Produktion von der Form

$$A \rightarrow aA_1 \dots A_n$$

ist.

### Satz 4.27

*Zu jeder CFG  $G$  gibt es eine CFG  $G'$  in Greibach-Normalform mit  $L(G') = L(G) \setminus \{\epsilon\}$ .*

## 4.4 Das Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen

**Zur Erinnerung:** Das Pumping-Lemma für reguläre Sprachen: Für jede reguläre Sprache  $L$  gibt es ein  $n \in \mathbb{N}$ , so dass sich jedes Wort  $z \in L$  mit  $|z| \geq n$  zerlegen lässt in  $z = uvw$  mit  $|uv| \leq n$ ,  $v \neq \epsilon$  und  $uv^*w \subseteq L$ .

Zum Beweis haben wir  $n = |Q|$  gewählt, wobei  $Q$  die Zustandsmenge eines  $L$  erkennenden DFA war. Das Argument war dann, dass beim Erkennen von  $z$  (mindestens) ein Zustand zweimal besucht werden muss und damit der dazwischen liegende Weg im Automaten beliebig oft wiederholt werden kann.

Ein ähnliches Argument kann auch auf kontextfreie Grammatiken angewendet werden.

## Satz 4.28 (Pumping-Lemma)

Für jede kontextfreie Sprache  $L$  gibt es ein  $n \geq 1$ , so dass sich jedes Wort  $z \in L$  mit  $|z| \geq n$  zerlegen lässt in

$$z = uvwxy,$$

mit

- $vx \neq \epsilon$ ,
- $|vwx| \leq n$ , und
- $\forall i \in \mathbb{N}. uv^iwx^iy \in L$ .

## Beweis:

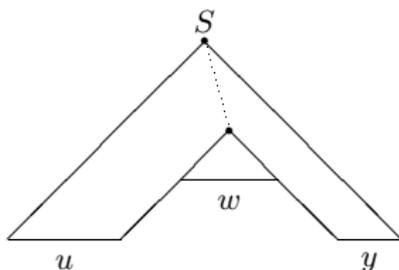
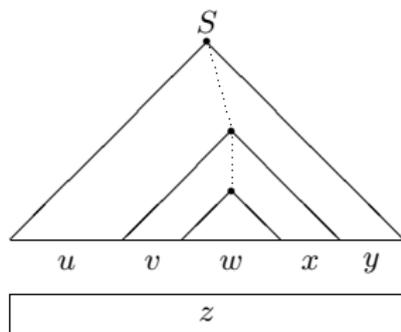
Sei  $G = (V, \Sigma, P, S)$  eine CFG in Chomsky-Normalform mit  $L(G) = L \setminus \{\epsilon\}$ . Wähle  $n = 2^{|V|}$ . Sei  $z \in L(G)$  mit  $|z| \geq n$ .

*Jeder Binärbaum mit  $\geq 2^k$  Blättern hat die Höhe  $\geq k$*

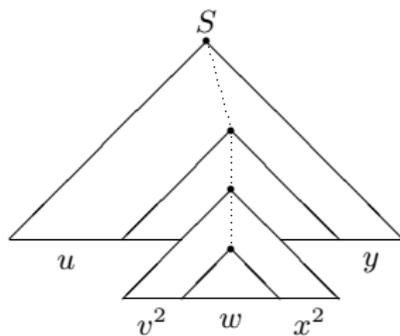
Dann hat der Syntaxbaum für  $z$  (ohne die letzte Stufe für die Terminale) mindestens einen Pfad der Länge  $\geq |V|$ , da er wegen der Chomsky-Normalform ein Binärbaum ist: Wir betrachten einen solchen Pfad maximaler Länge.

Auf diesem Pfad der Länge  $\geq |V|$  kommen  $\geq |V| + 1$  Nichtterminale vor, also mindestens eins doppelt. Nennen wir es  $A$ .

Die zwischen zwei Vorkommen von  $A$  liegende Teibleitung kann nun beliebig oft wiederholt werden.



Dieser Ableitungsbaum zeigt  
 $uw y \in L$



Dieser Ableitungsbaum zeigt  
 $uv^2wx^2y \in L$

### Beweis (Forts.):

Die Bedingung  $vx \neq \epsilon$  folgt, da das obere der beiden  $A$ 's mit  $A \rightarrow BC$  abgeleitet werden muss.

Um  $|vwx| \leq n$  zu erreichen, darf das obere  $A$  maximal  $|V| + 1$  Schritte von jedem Blatt entfernt sein. Da der ausgewählte Pfad maximale Länge hat, genügt es, dass das obere  $A$  vom Blatt dieses Pfads  $|V| + 1$  Schritte entfernt ist. Da es nur  $|V|$  Nichtterminale gibt, muss ein solches doppeltes  $A$  existieren. □

## Beispiel 4.29

Wir zeigen, dass die Sprache

$$L := \{a^i b^i c^i \mid i \in \mathbb{N}\}$$

nicht kontextfrei ist.

Wäre  $L$  kontextfrei, so gäbe es eine dazugehörige Pumping-Lemma Zahl  $n$  und wir könnten jedes  $z \in L$  mit  $|z| \geq n$ , insb.  $z = a^n b^n c^n$ , zerlegen und aufpumpen, ohne aus der Sprache herauszufallen.

Eine Zerlegung  $z = uvwxy$  mit  $|vwx| \leq n$  bedeutet aber, dass  $vwx$  nicht  $a$ 's und  $c$ 's enthalten kann. OE nehmen wir an,  $vwx$  enthält nur  $a$ 's und  $b$ 's. Da  $vx \neq \epsilon$ , muss  $vx$  mindestens ein  $a$  oder ein  $b$  enthalten.

Damit gilt aber  $\#_a(uv^2wx^2y) > \#_c(uv^2wx^2y)$  oder  $\#_b(uv^2wx^2y) > \#_c(uv^2wx^2y)$ . Also  $uv^2wx^2y \notin L$ . ⚡

### Beispiel 4.30

Mit dem Pumping-Lemma kann man zeigen, dass die Sprache  $\{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$  nicht kontextfrei ist.

Dies zeigt, dass Kontextbedingungen in Programmiersprachen, etwa „*Deklaration vor Benutzung*“, nicht durch kontextfreie Grammatiken ausgedrückt werden können.

## 4.5 Abschlusseigenschaften

### Satz 4.31

Seien kontextfreie Grammatiken  $G_1 = (V_1, \Sigma_1, P_1, S_1)$  und  $G_2 = (V_2, \Sigma_2, P_2, S_2)$  gegeben. Dann kann man in linearer Zeit kontextfreie Grammatiken für

- 1  $L(G_1) \cup L(G_2)$
- 2  $L(G_1)L(G_2)$
- 3  $(L(G_1))^*$
- 4  $(L(G_1))^R$

konstruieren.

Die Klasse der kontextfreien Sprachen ist also unter *Vereinigung*, *Konkatenation*, *Stern* und *Spiegelung* abgeschlossen.

## Beweis:

OE nehmen wir an, dass  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ .

- 1  $V = V_1 \cup V_2 \cup \{S\}$ ;  $S$  neu  
 $P = P_1 \cup P_2 \cup \{S \rightarrow S_1 \mid S_2\}$
- 2  $V = V_1 \cup V_2 \cup \{S\}$ ;  $S$  neu  
 $P = P_1 \cup P_2 \cup \{S \rightarrow S_1 S_2\}$
- 3  $V = V_1 \cup \{S\}$ ;  $S$  neu  
 $P = P_1 \cup \{S \rightarrow \epsilon \mid S_1 S\}$
- 4  $P = \{A \rightarrow \alpha^R \mid (A \rightarrow \alpha) \in P_1\}$



Es folgt: Verallgemeinerte kontextfreie Grammatiken mit Produktionen der Gestalt  $X \rightarrow r$ , wobei  $r$  ein regulärer Ausdruck über  $(V \cup T)$  ist, erzeugen kontextfreie Sprachen.

### Satz 4.32

Die Menge der kontextfreien Sprachen ist *nicht* abgeschlossen unter Durchschnitt oder Komplement.

Beweis:

$L_1 := \{a^i b^i c^j \mid i, j \in \mathbb{N}\}$  ist kontextfrei

$L_2 := \{a^i b^j c^j \mid i, j \in \mathbb{N}\}$  ist kontextfrei

$L_1 \cap L_2 = \{a^i b^i c^i \mid i \in \mathbb{N}\}$  ist *nicht* kontextfrei

Wegen *de Morgan* (1806–1871) können die CFLs daher auch nicht unter Komplement abgeschlossen sein. □

## 4.6 Algorithmen für kontextfreie Grammatiken

Wie üblich:  $G = (V, \Sigma, P, S)$  ist eine CFG.

Ein Symbol  $X \in V \cup \Sigma$  ist

**nützlich** gdw es eine Ableitung  $S \rightarrow_G^* w \in \Sigma^*$  gibt, in der  $X$  vorkommt.

**erzeugend** gdw es eine Ableitung  $X \rightarrow_G^* w \in \Sigma^*$  gibt.

**erreichbar** gdw es eine Ableitung  $S \rightarrow_G^* \alpha X \beta$  gibt.

### Fakt 4.33

*Nützliche Symbole sind erzeugend und erreichbar.*

*Aber nicht notwendigerweise umgekehrt:*

$$S \rightarrow AB \mid a, \quad A \rightarrow b$$

Ziel: Elimination der unnützen Symbole und der Produktionen, in denen sie vorkommen.

## Beispiel 4.34

$$S \rightarrow AB \mid a, \quad A \rightarrow b$$

- 1 Elimination nicht erzeugender Symbole:

$$S \rightarrow a, \quad A \rightarrow b$$

- 2 Elimination unerreichbarer Symbole:

$$S \rightarrow a$$

Umgekehrte Reihenfolge:

- 1 Elimination unerreichbarer Symbole:

$$S \rightarrow AB \mid a, \quad A \rightarrow b$$

- 2 Elimination nicht erzeugender Symbole:

$$S \rightarrow a, \quad A \rightarrow b$$

## Satz 4.35

*Eliminiert man aus einer Grammatik  $G$*

- 1 *alle nicht erzeugenden Symbole, mit Resultat  $G_1$ , und*
- 2 *aus  $G_1$  alle unerreichbaren Symbole, mit Resultat  $G_2$ ,*  
*dann enthält  $G_2$  nur noch nützliche Symbole und  $L(G_2) = L(G)$ .*

### Beweis:

Wir zeigen zuerst  $L(G_2) = L(G)$ .

Da  $P_2 \subseteq P$  gilt  $L(G_2) \subseteq L(G)$ .

Umgekehrt, sei  $w \in L(G)$ , dh  $S \rightarrow_G^* w$ .

Jedes Symbol in dieser Ableitung ist erreichbar und erzeugend.

Also gilt auch  $S \rightarrow_{G_2}^* w$ , dh  $w \in L(G_2)$ .

**Beweis (Forts.):**  $[G_1 : \text{erzeugend in } G, G_2 : \text{erreichbar in } G_1]$

Wir zeigen: Alle  $X \in V_2 \cup \Sigma_2$  sind nützlich in  $G_2$ , dh

$$S \rightarrow_{G_2}^* \dots X \dots \rightarrow_{G_2}^* \dots \in \Sigma_2^*$$

$X$  muss in  $G_1$  erreichbar sein, dh  $S \rightarrow_{G_1}^* \alpha X \beta$ .

Da alle Symbole in der Ableitung erreichbar sind:  $S \rightarrow_{G_2}^* \alpha X \beta$ .

Alle Symbole in  $\alpha X \beta$  müssen in  $G$  erzeugend sein:

$$\forall Y \in \alpha X \beta. \exists u \in \Sigma^*. Y \rightarrow_G^* u$$

Da alle Symbole in den Ableitungen  $Y \rightarrow_G^* u$  erzeugend sind:

$$\forall Y \in \alpha X \beta. \exists u \in \Sigma_1^*. Y \rightarrow_{G_1}^* u$$

Also gibt es  $w \in \Sigma_1^*$  mit  $\alpha X \beta \rightarrow_{G_1}^* w$ .

Die Ableitung  $\alpha X \beta \rightarrow_{G_1}^* w$  enthält nur Symbole, die in  $G_1$  erreichbar sind. Daher auch  $\alpha X \beta \rightarrow_{G_2}^* w$ .

$$S \rightarrow_{G_2}^* \alpha X \beta \rightarrow_{G_2}^* w$$



### Satz 4.36

Die Menge der erzeugenden Symbole einer CFG sind berechenbar.

#### Beweis:

Wir berechnen die erzeugenden Symbole induktiv:

- Alle Symbole in  $\Sigma$  sind erzeugend.
- Falls  $(A \rightarrow \alpha) \in P$  und alle Symbole in  $\alpha$  sind erzeugend, dann ist auch  $A$  erzeugend. □

### Beispiel 4.37

$$S \rightarrow SAB, \quad A \rightarrow BC, \quad B \rightarrow C, \quad C \rightarrow c$$

Erzeugend:  $\{c, C, B, A\}$ .

### Korollar 4.38

Für eine kontextfreie Grammatik  $G$  ist entscheidbar, ob  $L(G) = \emptyset$ .

#### Beweis:

□

### Satz 4.39

*Die Menge der erreichbaren Symbole einer CFG ist berechenbar.*

#### Beweis:

Wir berechnen die erreichbaren Symbole induktiv:

- $S$  ist erreichbar.
- Ist  $A$  erreichbar und  $(A \rightarrow \alpha X \beta) \in P$ ,  
so ist auch  $X$  erreichbar.



## Satz 4.40

Das Wortproblem ( $w \in L(G)?$ ) ist für eine CFG  $G$  entscheidbar.

### Beweis:

OE sei  $w \neq \epsilon$ . Wir eliminieren zuerst alle  $\epsilon$ -Produktionen aus  $G$  (wie in Lemma 4.22).

Dann berechnen wir induktiv die Menge  $R$  aller von  $S$  ableitbaren Wörter  $\in (V \cup \Sigma)^*$ , die nicht länger als  $w$  sind:

- $S \in R$
- Wenn  $\alpha B \gamma \in R$  und  $(B \rightarrow \beta) \in P$  und  $|\alpha \beta \gamma| \leq |w|$ , dann auch  $\alpha \beta \gamma \in R$ .

Es gilt:

$$w \in L_V(G) \quad \Leftrightarrow \quad w \in R$$

wobei  $L_V(G) := \{w \in (V \cup \Sigma)^* \mid S \rightarrow_G^* w\}$ .

Da  $R$  endlich ist ( $|R| \leq |V \cup \Sigma|^{|w|}$ ), ist  $w \in R$  entscheidbar, und damit auch  $w \in L_V(G)$ , und damit auch  $w \in L(G)$ . □

## 4.7 Der Cocke-Younger-Kasami-Algorithmus

Der CYK-Algorithmus entscheidet das Wortproblem für kontextfreie Grammatiken in Chomsky-Normalform.

Eingabe: Grammatik  $G = (V, \Sigma, P, S)$  in Chomsky-Normalform,  $w = a_1 \dots a_n \in \Sigma^*$ .

### Definition 4.41

$$V_{ij} := \{A \in V \mid A \rightarrow_G^* a_i \dots a_j\} \quad \text{für } i \leq j$$

Damit gilt:

$$w \in L(G) \quad \Leftrightarrow \quad S \in V_{1n}$$

Der CYK-Algorithmus berechnet die  $V_{ij}$  rekursiv nach wachsendem  $j - i$ :

$$V_{ii} = \{A \in V \mid (A \rightarrow a_i) \in P\}$$

$$V_{ij} = \left\{ A \in V \mid \begin{array}{l} \exists i \leq k < j, B \in V_{ik}, C \in V_{k+1,j} \\ (A \rightarrow BC) \in P \end{array} \right\} \quad \text{für } i < j$$

Korrektheitsbeweis: Induktion nach  $j - i$ .

Die  $V_{ij}$  als Tabelle (mit  $ij$  statt  $V_{ij}$ ):

14			
13	24		
12	23	34	
11	22	33	44
$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$

## Beispiel 4.42

$S \rightarrow AB \mid BC$

$A \rightarrow BA \mid a$

$B \rightarrow CC \mid b$

$C \rightarrow AB \mid a$

15					
14	25				
13	24	35			
12	23	34	45		
11	22	33	44	55	
	$b$	$a$	$a$	$b$	$a$

### Satz 4.43

Der CYK-Algorithmus entscheidet das Wortproblem  $w \in L(G)$  für eine fixe CFG  $G$  in Chomsky-Normalform in Zeit  $O(|w|^3)$ .

#### Beweis:

Sei  $n := |w|$ . Es werden  $\frac{n(n-1)}{2} \in O(n^2)$  Mengen  $V_{ij}$  berechnet.

$$V_{ij} = \left\{ A \in V \mid \begin{array}{l} \exists i \leq k < j, B \in V_{ik}, C \in V_{k+1,j} \\ (A \rightarrow BC) \in P \end{array} \right\} \quad (i < j)$$

Für jede dieser Mengen werden

- $j - i < n$  Werte für  $k$  betrachtet,
- für jedes  $k$  wird für alle Produktionen  $A \rightarrow BC$  untersucht, ob  $B \in V_{ik}$  und  $C \in V_{k+1,j}$ , wobei  $|V_{ik}|, |V_{k+1,j}| \leq |V|$ .

Gesamtzeit:  $O(n^3)$ , denn  $|P|$  und  $|V|$  sind Konstanten unabhängig von  $n$ . [Konstruktion jeder Menge  $V_{ii}$ :  $O(1)$ . Für alle  $V_{ii}$  also  $O(n)$ .] □

**Erweiterung** Der CYK-Algorithmus kann so erweitert werden, dass er nicht nur das Wortproblem entscheidet, sondern auch die Menge der Syntaxbäume für die Eingabe berechnet.

Realisierung:

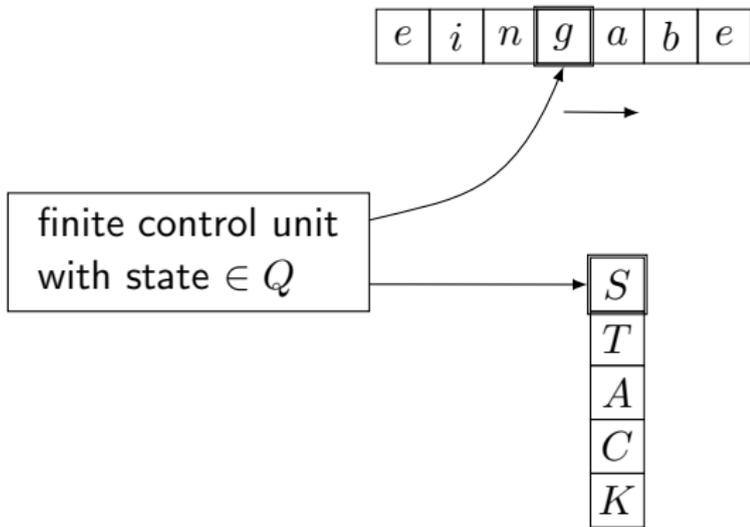
- $V_{ij}$  ist die Menge der Syntaxbäume mit Rand  $a_i \dots a_j$ .
- Statt  $A$  enthält  $V_{ij}$  die Syntaxbäume, dessen Wurzel mit  $A$  beschriftet ist.

## Vorschau

Für CFGs sind folgende Probleme nicht entscheidbar:

- Äquivalenz:  $L(G_1) = L(G_2)$ ?
- Schnittproblem:  $L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$ ?
- Regularität:  $L(G)$  regulär?
- Mehrdeutigkeit: Ist  $G$  mehrdeutig?

## 4.8 Kellerautomaten



## Definition 4.44

Ein (nichtdeterministischer) **Kellerautomat**

$M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \delta, F)$  besteht aus

- einer endlichen Menge von **Zuständen**  $Q$ ,
- einem endlichen **Eingabealphabet**  $\Sigma$ ,
- einem endlichen **Kelleralphabet**  $\Gamma$ ,
- einem **Anfangszustand**  $q_0$ ,
- einem **untersten Kellerzeichen**  $Z_0$ ,
- einer **Übergangsfunktion**  $\delta: Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \times \Gamma \rightarrow \mathcal{P}_e(Q \times \Gamma^*)$ ,  
(Hierbei bedeutet  $\mathcal{P}_e$  die Menge aller endlichen Teilmengen)
- einer Menge  $F \subseteq Q$  von **Endzuständen**.

Intuitive Bedeutung von  $(q', \alpha) \in \delta(q, a, Z)$ :

*Wenn sich  $M$  in Zustand  $q$  befindet, das Eingabezeichen  $a$  liest, und  $Z$  das oberste Kellerzeichen ist, so kann  $M$  im nächsten Schritt in  $q'$  übergehen und  $Z$  durch  $\alpha$  ersetzen.*

Intuitive Bedeutung von  $(q', \alpha) \in \delta(q, a, Z)$ :

*Wenn sich  $M$  in Zustand  $q$  befindet, das Eingabezeichen  $a$  liest, und  $Z$  das oberste Kellerzeichen ist, so kann  $M$  im nächsten Schritt in  $q'$  übergehen und  $Z$  durch  $\alpha$  ersetzen.*

Spezialfälle:

POP-Operation:  $\alpha = \epsilon$ .

Das oberste kellerzeichen  $Z$  wird entfernt.

PUSH-Operation:  $\alpha = Z'Z$ .

$Z'$  wird als neues oberstes Kellerzeichen gePUSHT.

$\epsilon$ -Übergang  $a = \epsilon$ .

Ohne Lesen eines Eingabezeichens.

**Aufgabe:** Jeder Schritt kann durch eine Sequenz von diesen drei Operationen simuliert werden. (Hilfszustände verwenden.)

### Definition 4.45

Eine **Konfiguration** eines Kellerautomaten  $M$  ist ein Tripel  $(q, w, \alpha)$  mit  $q \in Q$ ,  $w \in \Sigma^*$  und  $\alpha \in \Gamma^*$ .

Die **Anfangskonfiguration** von  $M$  für die Eingabe  $w \in \Sigma^*$  ist  $(q_0, w, Z_0)$ .

Intuitiv stellt eine Konfiguration  $(q, w, \alpha)$  eine “Momentaufnahme” des Kellerautomaten dar:

- Der momentane Zustand ist  $q$ .
- Der noch zu lesende Teil der Eingabe ist  $w$ .
- Der aktuelle Kellerinhalt ist  $\alpha$  (das oberste Kellerzeichen ganz links stehend).

## Definition 4.46

Auf der Menge aller Konfigurationen definieren wir eine binäre Relation  $\rightarrow_M$  wie folgt:

$$(q, aw, Z\alpha) \rightarrow_M \begin{cases} (q', w, \beta\alpha) & \text{falls } (q', \beta) \in \delta(q, a, Z) \\ (q', aw, \beta\alpha) & \text{falls } (q', \beta) \in \delta(q, \epsilon, Z) \end{cases}$$

Die reflexive und transitive Hülle von  $\rightarrow_M$  wird mit  $\rightarrow_M^*$  bezeichnet.

Intuitive Bedeutung von  $(q, w, \alpha) \rightarrow_M (q', w', \alpha')$ :

*Wenn  $M$  sich in der Konfiguration  $(q, w, \alpha)$  befindet, dann kann er in einen Schritt in die Nachfolgerkonfiguration  $(q', w', \alpha')$  übergehen.*

Achtung: eine Konfiguration kann mehrere Nachfolger haben (Nichtdeterminismus!)

## Definition 4.47

- Ein PDA  $M$  akzeptiert  $w \in \Sigma^*$  mit Endzustand gdw

$$(q_0, w, Z_0) \rightarrow_M^* (f, \epsilon, \gamma) \text{ f\"ur ein } f \in F, \gamma \in \Gamma^*.$$

$$L_F(M) := \{w \mid \exists f \in F, \gamma \in \Gamma^*. (q_0, w, Z_0) \rightarrow_M^* (f, \epsilon, \gamma)\}$$

- Ein PDA  $M$  akzeptiert  $w \in \Sigma^*$  mit leeren Keller gdw

$$(q_0, w, Z_0) \rightarrow_M^* (q, \epsilon, \epsilon) \text{ f\"ur ein } q \in Q.$$

$$L_\epsilon(M) := \{w \mid \exists q \in Q. (q_0, w, Z_0) \rightarrow_M^* (q, \epsilon, \epsilon)\}$$

*Konvention:* Wir blenden die  $F$ -Komponente von  $M$  aus, wenn wir nur an  $L_\epsilon(M)$  interessiert sind.

### Beispiel 4.48

Die Sprache  $L = \{ww^R \mid w \in \{0, 1\}^*\}$  wird vom PDA

$$M = (\{p, q, r\}, \{0, 1\}, \{0, 1, Z_0\}, p, Z_0, \delta, \{r\})$$

$$\delta(p, a, Z) = \{(p, aZ)\} \quad \text{für } a \in \{0, 1\}, Z \in \{0, 1, Z_0\}$$

$$\delta(p, \epsilon, Z) = \{(q, Z)\} \quad \text{für } Z \in \{0, 1, Z_0\}$$

$$\delta(q, a, a) = \{(q, \epsilon)\} \quad \text{für } a \in \{0, 1\}$$

$$\delta(q, \epsilon, Z_0) = \{(r, \epsilon)\}$$

sowohl mit Endzustand als auch mit leerem Keller akzeptiert.

Bsp:  $(p, 110011, Z_0) \rightarrow_M^* (r, \epsilon, \epsilon)$ .

## Ziel:

Akzeptanz durch Endzustände und leeren Keller gleich mächtig.

## Satz 4.49 (Endzustand $\rightarrow$ leerer Keller)

Zu jedem PDA  $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \delta, F)$  kann man in linearer Zeit einen PDA  $M' = (Q', \Sigma, \Gamma', q'_0, Z'_0, \delta')$  konstruieren mit  $L_F(M) = L_\epsilon(M')$ .

## Ziel:

$$(q_0, w, Z_0) \rightarrow_M^* (f, \epsilon, \gamma) \quad \Leftrightarrow \quad (q'_0, w, Z'_0) \rightarrow_{M'}^* (q, \epsilon, \epsilon)$$

## Beweisskizze:

$M'$  (mit leerem Keller) simuliert  $M$  (mit Endzustand). Zusätzlich:

- Sobald  $M$  einen Endzustand erreicht, darf  $M'$  den Keller leeren (im neuen Zustand  $\bar{q}$ ).
- Um zu verhindern, dass der Keller von  $M'$  leer wird, ohne dass  $M$  in einem Endzustand ist, führen wir ein neues Kellersymbol  $Z'_0$  ein.

$$\begin{aligned}Q' &:= Q \uplus \{\bar{q}, q'_0\} \\ \Gamma' &:= \Gamma \uplus \{Z'_0\}\end{aligned}$$

Wir **erweitern**  $\delta$  zu  $\delta'$ :

$$\delta'(q'_0, \epsilon, Z'_0) = \{(q_0, Z_0 Z'_0)\}$$

$$\delta'(q, b, Z) = \delta(q, b, Z)$$

$$\delta'(f, a, Z) = \delta(f, a, Z)$$

$$\delta'(f, \epsilon, Z) = \delta(f, \epsilon, Z) \cup \{(\bar{q}, \epsilon)\} \quad \text{für } f \in F, Z \in \Gamma'$$

$$\delta'(\bar{q}, \epsilon, Z) = \{(\bar{q}, \epsilon)\}$$

$$\text{für } q \in Q \setminus F, b \in \Sigma \cup \{\epsilon\}, Z \in \Gamma$$

$$\text{für } f \in F, a \in \Sigma, Z \in \Gamma$$

$$\text{für } f \in F, Z \in \Gamma'$$

$$\text{für } Z \in \Gamma'$$

□

## Satz 4.50 (Leerer Keller $\rightarrow$ Endzustand)

Zu jedem PDA  $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \delta)$  kann man in linearer Zeit einen PDA  $M' = (Q', \Sigma, \Gamma', q'_0, Z'_0, \delta', F)$  konstruieren mit  $L_\epsilon(M) = L_F(M')$ .

### Beweisskizze:

$M'$  (mit Endzustand) simuliert  $M$  (mit leerem Keller). Zusätzlich:

- $M'$  schreibt am Anfang  $Z_0$  (das unterste Kellerzeichen von  $M$ ) auf den Keller, 'über  $Z'_0$ .
- Sobald  $M'$  auf dem Keller  $Z'_0$  wieder findet, ist der Keller von  $M$  leer, und  $M'$  geht in den (neuen) Endzustand  $f$ .

$$Q' := Q \uplus \{q'_0, f\}$$

$$\Gamma' := \Gamma \uplus \{Z'_0\}$$

$$F := \{f\}$$

$$\delta'(q'_0, \epsilon, Z'_0) = \{(q_0, Z_0 Z'_0)\}$$

$$\delta'(q, b, Z) = \delta(q, b, Z) \quad \text{für } q \in Q, b \in \Sigma \cup \{\epsilon\}, Z \in \Gamma$$

$$\delta'(q, \epsilon, Z'_0) = \{(f, Z'_0)\} \quad \text{für } q \in Q \quad \square$$

Die folgenden Sätze erleichtern Beweise über Berechnungen von PDAs.

### Lemma 4.51 (Erweiterungslemma)

$$(q, u, \alpha) \rightarrow_M^n (q', u', \alpha') \implies (q, uv, \alpha\beta) \rightarrow_M^n (q', u'v, \alpha'\beta)$$

**Beweis:**

Nach Definition von  $\rightarrow_M$  gilt

$$\begin{aligned} (q_i, u_i, \alpha_i) \rightarrow_M (q_{i+1}, u_{i+1}, \alpha_{i+1}) &\implies \\ (q_i, u_i v, \alpha_i \beta) \rightarrow_M (q_{i+1}, u_{i+1} v, \alpha_{i+1} \beta) & \end{aligned}$$

Mit Induktion über  $n$  folgt die Behauptung. □

Gilt die Umkehrung, zB

$$(q_1, aa, XZ) \rightarrow_M^* (q_3, \epsilon, YZ) \implies (q_1, aa, X) \rightarrow_M^* (q_3, \epsilon, Y) ?$$

Keller



## Satz 4.52 (Zerlegungssatz)

Wenn  $(q, w, Z_{1\dots k}) \rightarrow_M^n (q', \epsilon, \epsilon)$   
dann gibt es  $u_i, p_i, n_i$ , so dass

$$(p_{i-1}, u_i, Z_i) \rightarrow_M^{n_i} (p_i, \epsilon, \epsilon) \quad (i = 1, \dots, k)$$

und  $w = u_1 \dots u_k$ ,  $p_0 = q$ ,  $p_k = q'$ ,  $\sum n_i = n$ .

**Beweis:** Mit Induktion über  $n$ . Basis trivial.

Schritt: Eine Berechnung der Länge  $n + 1$  hat die Form

$$(q, bw', Z_{1\dots k}) \rightarrow_M (p, w', Y_{1\dots l} Z_{2\dots k}) \rightarrow_M^n (q', \epsilon, \epsilon)$$

IA  $\Rightarrow \exists v_j, r_j, m_j$  ( $j = 1, \dots, l$ ),  $\exists u_i, p_i, n_i$  ( $i = 2, \dots, k$ ) mit

$$(r_{j-1}, v_j, Y_j) \rightarrow_M^{m_j} (r_j, \epsilon, \epsilon) \quad (p_{i-1}, u_i, Z_i) \rightarrow_M^{n_i} (p_i, \epsilon, \epsilon)$$

und  $w' = v_{1\dots l} u_{2\dots k}$ ,  $r_0 = p$ ,  $r_l = p_1$ ,  $p_k = q'$ ,  $\sum m_j + \sum n_i = n$ .

Mit Erweiterungslemma:  $(r_{j-1}, v_{j\dots l}, Y_{j\dots l}) \rightarrow_M^{m_j} (r_j, v_{j+1\dots l}, Y_{j+1\dots l})$

$\Rightarrow (r_0, v_{1\dots l}, Y_{1\dots l}) \rightarrow_M^{n_1-1} (r_l, \epsilon, \epsilon)$  wobei  $n_1 := 1 + \sum m_j$ .

Aus  $(q, bv_{1\dots l}, Z_1) \rightarrow_M (p, v_{1\dots l}, Y_{1\dots l})$  folgt  $(p_0, u_1, Z_1) \rightarrow_M^{n_1} (p_1, \epsilon, \epsilon)$

wobei  $p_0 := q$ ,  $u_1 := bv_{1\dots l}$ ,  $p_1 := r_l$ .

Damit auch  $w = bw' = bv_{1\dots l} u_{2\dots k} = u_{1\dots k}$  und  $\sum n_i = n + 1$ .  $\square$

## 4.9 Äquivalenz von PDAs und CFGs

### Satz 4.53 (CFG $\rightarrow$ PDA)

Zu jeder CFG  $G$  kann man einen PDA  $M$  konstruieren, der mit leerem Stack akzeptiert, so dass  $L_\epsilon(M) = L(G)$ .

**Konstruktion:**

Zuerst bringen wir alle Produktionen von  $G$  in die Form

$$A \rightarrow bB_1 \dots B_k$$

wobei  $b \in \Sigma \cup \{\epsilon\}$ .

Methode: Für jedes  $a \in \Sigma$

- 1 füge ein neues  $A_a$  zu  $V$  hinzu,
- 2 ersetze  $a$  rechts in  $P$  durch  $A_a$  (außer am Kopfende),
- 3 füge eine neue Produktion  $A_a \rightarrow a$  hinzu.

Alle Produktionen in  $G = (V, \Sigma, P, S)$  haben jetzt die Form

$$A \rightarrow bB_1 \dots B_k$$

Der PDA wird wie folgt definiert:

$$M := (\{q\}, \Sigma, V, q, S, \delta)$$

wobei

$$(A \rightarrow b\beta) \in P \implies \delta(q, b, A) \ni (q, \beta)$$

also für alle  $b \in \Sigma \cup \{\epsilon\}$  und  $A \in V$ :

$$\delta(q, b, A) := \{(q, \beta) \mid (A \rightarrow b\beta) \in P\}$$

## Lemma 4.54

Für alle  $u, v \in \Sigma^*$  und  $\gamma \in V^*$  und  $A \in V$  gilt:

$$A \rightarrow_G^n u\gamma \text{ mit Linksableitung gdw } (q, uv, A) \rightarrow_M^n (q, v, \gamma)$$

### Beweis:

Mit Induktion über  $n$ . Basis  $n = 0$  trivial. Schritt:

$$\begin{aligned} & A \rightarrow_G^{n+1} u\gamma \\ \Leftrightarrow & \\ & \exists (B \rightarrow b\beta) \in P, w, \alpha. A \rightarrow_G^n wB\alpha \rightarrow_G wb\beta\alpha = u\gamma \\ & \hspace{15em} (\text{dh } wb = u, \beta\alpha = \gamma) \\ \Leftrightarrow & \\ & (q, wbv, A) \rightarrow_M^n (q, bv, B\alpha) \wedge (q, bv, B\alpha) \rightarrow_M (q, v, \beta\alpha) \\ \Leftrightarrow & \\ & (q, uv, A) \rightarrow_M^{n+1} (q, v, \gamma) \end{aligned}$$



$A \rightarrow_G^n u\gamma$  mit Linksableitung gdw  $(q, uv, A) \rightarrow_M^n (q, v, \gamma)$

### Satz 4.55

$$L(G) = L_\epsilon(M)$$

Beweis:

$$u \in L(G)$$

$$\Leftrightarrow S \rightarrow_G^* u \text{ mit Linksableitung}$$

$$\Leftrightarrow (q, u, S) \rightarrow_M^* (q, \epsilon, \epsilon)$$

$$\Leftrightarrow u \in L_\epsilon(M)$$



## Satz 4.56 (PDA $\rightarrow$ CFG)

Zu jedem PDA  $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \delta)$ , der mit leerem Keller akzeptiert, kann man eine CFG  $G$  konstruieren mit  $L(G) = L_\epsilon(M)$ .

**Konstruktion:**  $G := (V, \Sigma, P, S)$  mit

$V := Q \times \Gamma \times Q \cup \{S\}$  wobei wir die Tripel mit  $[\cdot, \cdot, \cdot]$  notieren

und  $P$  die folgenden Produktionen enthält:

- $S \rightarrow [q_0, Z_0, q]$  für alle  $q \in Q$
- Für alle  $\delta(q, b, Z) \ni (r_0, Z_1 \dots Z_k)$  und für alle  $r_1, \dots, r_k \in Q$ :

$$[q, Z, r_k] \rightarrow b[r_0, Z_1, r_1][r_1, Z_2, r_2] \dots [r_{k-1}, Z_k, r_k]$$

Idee:  $[q, Z, r_k] \xrightarrow{*}_G w$  gdw  $(q, w, Z) \xrightarrow{*}_M (r_k, \epsilon, \epsilon)$

Die  $r_1, \dots, r_k$  sind potenzielle Zwischenzustände beim Akzeptieren der Teilwörter von  $bu_1 \dots u_k = w$ , die zu  $Z_1, \dots, Z_k$  gehören.  
(Zerlegungssatz!)

## Lemma 4.57

$$[q, Z, p] \rightarrow_G^n w \text{ gdw } (q, w, Z) \rightarrow_M^n (p, \epsilon, \epsilon)$$

### Beweis:

( $\Rightarrow$ ): Wenn  $[q, Z, p] \rightarrow_G^n w$  dann  $(q, w, Z) \rightarrow_M^n (p, \epsilon, \epsilon)$ .

Mit Induktion über  $n$ .

IA: Beh. gilt für alle Werte  $< n$ . Zz: Beh. gilt für  $n$ .

Die Ableitung  $[q, Z, p] \rightarrow_G^n w$  muss von folgender Form sein:

$$\begin{array}{l} [q, Z, r_k] \quad \rightarrow_G \quad b[r_0, Z_1, r_1] \dots [r_{k-1}, Z_k, r_k] \\ \quad \rightarrow_G^{n-1} \quad bu_1 \dots u_k = w \end{array}$$

mit  $r_k = p$ ,  $(r_0, Z_1 \dots Z_k) \in \delta(q, b, Z)$ ,

$[r_{i-1}, Z_i, r_i] \rightarrow_G^{n_i} u_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) und  $\sum n_i = n - 1$ .

IA  $\Rightarrow (r_{i-1}, u_i, Z_i) \rightarrow_M^{n_i} (r_i, \epsilon, \epsilon)$

### Erweiterungslemma

$\Rightarrow (r_{i-1}, u_i \dots u_k, Z_i \dots Z_k) \rightarrow_M^{n_i} (r_i, u_{i+1} \dots u_k, Z_{i+1} \dots Z_k)$

$\Rightarrow (q, w, Z) \rightarrow_M (r_0, u_1 \dots u_k, Z_1 \dots Z_k) \rightarrow_M^{n-1} (r_k, \epsilon, \epsilon)$



## Beweis (Forts.):

( $\Leftarrow$ ): Wenn  $(q, w, Z) \rightarrow_M^n (p, \epsilon, \epsilon)$  dann  $[q, Z, p] \rightarrow_G^n w$ .

Mit Induktion über  $n$ .

IA: Beh. gilt für alle Werte  $< n$ . Zz: Beh. gilt für  $n$ .

Die Berechnung  $(q, w, Z) \rightarrow_M^n (p, \epsilon, \epsilon)$  muss von dieser Form sein:

$$(q, w, Z) \rightarrow_M (r_0, w', Z_1 \dots Z_k) \rightarrow_M^{n-1} (p, \epsilon, \epsilon)$$

mit  $w = bw'$ ,  $(r_0, Z_1 \dots Z_k) \in \delta(q, b, Z)$ .

Nach dem Zerlegungssatz muss es  $r_i$ ,  $u_i$  und  $n_i$  geben mit

$$(r_{i-1}, u_i, Z_i) \rightarrow_M^{n_i} (r_i, \epsilon, \epsilon) \quad (i = 1, \dots, k)$$

und  $w' = u_1 \dots u_k$ ,  $\sum n_i = n - 1$ .

$$\text{IA} \Rightarrow [r_{i-1}, Z_i, r_i] \rightarrow_G^{n_i} u_i$$

$$\Rightarrow [q, Z, p] \rightarrow_G b[r_0, Z_1, r_1] \dots [r_{k-1}, Z_k, r_k]$$

$$\rightarrow_G^{n-1} bu_1 \dots u_k = w$$



Damit haben wir bewiesen:

### Satz 4.58

*Eine Sprache ist kontextfrei gdw sie von einem Kellerautomaten akzeptiert wird.*

## 4.10 Deterministische Kellerautomaten

### Definition 4.59

Ein PDA heißt **deterministisch (DPDA)** gdw für alle  $q \in Q$ ,  $a \in \Sigma$  und  $Z \in \Gamma$

$$|\delta(q, a, Z)| + |\delta(q, \epsilon, Z)| \leq 1$$

### Beispiel 4.60

Der folgende DPDA mit  $\Sigma = \{0, 1, \$\}$ ,  $\Gamma = \{Z_0, 0, 1\}$  akzeptiert die Sprache  $\{w\$w^R \mid w \in \{0, 1\}^*\}$ .

### Definition 4.61

Eine CFL heißt **deterministisch (DCFL)** gdw sie von einem DPDA akzeptiert wird.

Man kann zeigen: Die CFL  $\{ww^R \mid w \in \{0,1\}^*\}$  ist nicht deterministisch.

Da man jeden DFA leicht mit einem DPDA simulieren kann:

### Fakt 4.62

*Jede reguläre Sprache ist eine DCFL.*

Eine Sprache erfüllt die **Präfix Bedingung** gdw wenn sie keine zwei Wörter enthält, so dass das eine ein *echtes* Präfix des anderen ist.

### Beispiel 4.63

- Die Sprache  $a^*$  erfüllt die Präfix Bedingung nicht.
- Die Sprache  $\{w\$w^R \mid w \in \{0,1\}^*\}$  erfüllt die Präfix Bedingung.

### Lemma 4.64

$\exists \text{DPDA } M. L = L_\epsilon(M) \iff$   
 $\exists \text{DPDA } M. L = L_F(M) \text{ und } L \text{ erfüllt die Präfix Bedingung}$

Beweis: Übung!

Es gibt also einen DPDA  $M$  mit  $L_F(M) = L(a^*)$  aber keinen DPDA mit  $L_\epsilon(M) = L(a^*)$ .

Im Folgenden: Akzeptanz durch Endzustand.

## Satz 4.65

Die Klasse der DCFLs ist unter Komplement abgeschlossen.

Beweis: Komplex. Siehe zB Erk&Prieze oder Kozen.

Da die CFLs *nicht* unter Komplement abgeschlossen sind:

## Korollar 4.66

Die DCFLs sind eine echte Teilklasse der CFLs.

Hier ist eine konkrete Sprache in  $CFL \setminus DCFL$ :

Sei  $L_{ww} := \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$ .

Dann ist  $L := \{a, b\}^* \setminus L_{ww}$  eine CFL aber keine DCFL.

$L$  wird von folgender CFG erzeugt (ohne Beweis):

$$\begin{aligned} S &\rightarrow AB \mid BA \mid A \mid B \\ A &\rightarrow CAC \mid a \quad B \rightarrow CBC \mid b \quad C \rightarrow a \mid b \end{aligned}$$

Wäre  $L$  eine DCFL, dann auch  $\bar{L} = L_{ww}$  (wegen Satz 4.65).

Aber mit dem Pumping Lemma kann man zeigen, dass  $L_{ww}$  keine CFL ist, und daher erst recht keine DCFL.

## Lemma 4.67

*Die Klasse der DCFLs ist weder unter Schnitt noch unter Vereinigung abgeschlossen.*

### Beweis:

Erinnerung: CFLs nicht unter Schnitt abgeschlossen:

$L_1 := \{a^i b^i c^j \mid i, j \in \mathbb{N}\}$  ist kontextfrei

$L_2 := \{a^i b^j c^j \mid i, j \in \mathbb{N}\}$  ist kontextfrei

$L_1 \cap L_2 = \{a^i b^i c^i \mid i \in \mathbb{N}\}$  ist nicht kontextfrei

Aber  $L_1$  und  $L_2$  sind sogar DCFLs.

Da  $L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$  können die DCFLs auch nicht unter Vereinigung abgeschlossen sein. □

### Lemma 4.68

*Jede DCFL ist nicht inhärent mehrdeutig, dh sie wird von einer nicht-mehrdeutigen Grammatik erzeugt.*

Beweisidee: Die Konversion  $PDA \rightarrow CFG$  erzeugt aus einem DPDA eine nicht-mehrdeutige CFG. [HMU]

### Satz 4.69

*Das Wortproblem für DCFLs ist in linearer Zeit lösbar.*

Mehr Information: Vorlesungen zum Übersetzerbau

## 4.11 Tabellarischer Überblick

### Abschlusseigenschaften

	Schnitt	Vereinigung	Komplement	Produkt	Stern
Regulär	ja	ja	ja	ja	ja
DCFL	nein	nein	ja	nein	nein
CFL	nein	ja	nein	ja	ja

### Entscheidbarkeit

	Wortproblem	Leerheit	Äquivalenz	Schnittproblem
DFA	$O(n)$	ja	ja	ja
DPDA	$O(n)$	ja	ja	nein(*)
CFG	$O(n^3)$	ja	nein(*)	nein(*)

Sénizergues (1997), Stirling (2001)

(\*) Vorschau

## 5. Berechenbarkeit, Entscheidbarkeit

Überblick:

- Was kann man berechnen? Dh:
  - Welche Funktionen kann man in endlicher Zeit berechnen?
  - Welche Eigenschaften von Objekten können in endlicher Zeit entschieden werden?
- Mit welchen Sprachen/Maschinen?
- Was kann man in polynomieller Zeit berechnen?

## 5.1 Der Begriff der Berechenbarkeit

Eine Funktion  $f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$  ist **intuitiv berechenbar**, wenn es einen Algorithmus gibt, der bei Eingabe  $(n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{N}^k$

- nach endlich vielen Schritten mit Ergebnis  $f(n_1, \dots, n_k)$  hält, falls  $f(n_1, \dots, n_k)$  definiert ist,
- und nicht terminiert, falls  $f(n_1, \dots, n_k)$  nicht definiert ist.

Was bedeutet „Algorithmus“? Assembler? C? Java? OCaml?  
Macht es einen Unterschied?

Terminologie: Eine Funktion  $f : A \rightarrow B$  ist

**total** gdw  $f(a)$  für alle  $a \in A$  definiert ist.

**partiell** gdw  $f(a)$  auch undefiniert sein kann.

**echt partiell** gdw sie nicht total ist.

### Beispiel 5.1

Jeder Algorithmus berechnet eine partielle Funktion.

Der Algorithmus

```
input(n);  
while true do ;
```

berechnet die überall undefinierte Funktion, dh  $\emptyset \subset \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ .

## Beispiel 5.2

Ist die Funktion

$$f_1(n) := \begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ als Ziffernfolge Anfangsstück der} \\ & \text{Dezimalbruchentwicklung von } \pi \text{ ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

berechenbar? (Bsp:  $f_1(31415) = 1$  aber  $f_1(315) = 0$ )

Ja, denn es Algorithmen gibt, die  $\pi$  iterativ auf beliebig viele Dezimalstellen genau berechnet werden.

## Beispiel 5.3

Ist die Funktion

$$f_2(n) := \begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ als Ziffernfolge irgendwo in der} \\ & \text{Dezimalbruchentwicklung von } \pi \text{ vorkommt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

berechenbar? (Bsp:  $f_2(415) = 1$ )

Unbekannt!

Durch schrittweise Approximation und Suche in der Dezimalbruchentwicklung von  $\pi$  kann man feststellen, dass  $n$  vorkommt. Aber wie stellt man fest, dass  $n$  *nicht* vorkommt? Nichttermination statt 0!

Vielleicht gibt es aber einen (noch zu findenden) mathematischen Satz, der genaue Aussagen über die in  $\pi$  vorkommenden Ziffernfolgen macht.

## Beispiel 5.4

Ist die Funktion

$$f_3(n) := \begin{cases} 1 & \text{falls } \underbrace{00 \dots 00}_{10^9 \text{ Nullen}} \\ & \text{in der Dezimalbruchentwicklung von } \pi \text{ vorkommt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

berechenbar?

Ja, denn  $f_3$  ist entweder die konstante Funktion, die 1 für alle  $n \geq 0$  zurückgibt, oder die konstante Funktion, die 0 für alle  $n \geq 0$  zurückgibt. Beide sind berechenbar.

Dies ist ein **nicht-konstruktiver Beweis**:

Wir wissen, es gibt einen Algorithmus, der  $f_3$  berechnet, aber wir wissen nicht, welcher.

## Beispiel 5.5

Ist die Funktion

$$f_4(n) := \begin{cases} 1 & \text{falls mindestens } n \text{ mal hintereinander irgendwo in der} \\ & \text{Dezimalbruchentwicklung von } \pi \text{ eine } 0 \text{ vorkommt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

berechenbar?

Ja, denn

- entweder kommt  $0^n$  für beliebig große  $n$  vor, dann ist  $f_3(n) = 1$  für alle  $n$ ,
- oder es gibt eine längste vorkommende Sequenz  $0^m$ , dann ist  $f_3(n) = 1$  für  $n \leq m$  und  $f_3(n) = 0$  sonst.

Beide Funktionen sind berechenbar.

Wieder ein **nicht-konstruktiver Beweis**.

### Annahme:

Algorithmen können als Wörter über ein  
endliches Alphabet kodiert werden.

Gilt insbesondere für alle bekannten Programmiersprachen.

### Satz 5.6

*Es gibt nicht-berechenbare Funktionen  $\mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ .*

### Beweis:

Es gibt nur **abzählbar** viele Algorithmen, aber **überabzählbar** viele Funktionen in  $\mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ . □

Erinnerung: Eine Menge  $M$  ist **abzählbar** falls es eine injektive Funktion  $M \rightarrow \mathbb{N}$  gibt.

Äquivalente Definitionen :

- Entweder gibt es eine Bijektion  $M \rightarrow \{0, \dots, n\}$  für ein  $n \in \mathbb{N}$ , oder eine Bijektion  $M \rightarrow \mathbb{N}$ .
- Es gibt eine Nummerierung der Elemente von  $M$ .

Eine Menge ist **überabzählbar** wenn sie nicht abzählbar ist.

## Lemma 5.7

$\Sigma^*$  ist abzählbar (falls  $\Sigma$  endlich).

### Beweis:

Durch Beispiel:

$$\begin{aligned}\{0,1\}^* &= \{\epsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, \dots\} \\ \mathbb{N} &= \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots\}\end{aligned}$$



$\implies$  Die Menge der Algorithmen ist abzählbar.

## Satz 5.8

Die Menge aller Funktionen  $\mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$  ist überabzählbar.

### Beweis:

Indirekt. Nimm an, die Menge der Funktionen sei abzählbar.

	0	1	2	3	...
$f_0$	0	1	1	0	...
$f_1$	1	0	0	0	...
$f_2$	0	0	1	0	...
$f_3$	0	0	1	0	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Eine Funktion  $f$ , die nicht in der Tabelle ist:  $\neg$ Diagonale!

$f \mid 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad \dots$

Widerspruch!

Formal: Sei  $f(i) := 1 - f_i(i)$ . Dann  $f \neq f_i$  für alle  $i$ , da  $f(i) \neq f_i(i)$ .



## Satz 5.9

Wenn Algorithmen als endliche Wörter kodiert werden können, dann gibt es unberechenbare Funktionen  $\mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ .

### Beweis:

Sei  $\mathcal{F}$  die Menge aller Funktionen  $\mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ .

Sei  $\mathcal{A}$  die Menge der Wörter, die Algorithmen kodieren.

Beweis durch Widerspruch.

**Annahme:** Alle Funktionen von  $\mathcal{F}$  sind berechenbar.

Da  $\mathcal{A}$  abzählbar ist (Lemma 5.7), gibt es eine injektive Funktion  $anum: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{N}$ .

Definiere  $fnum: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{N}$  durch

$$fnum(f) = \min\{anum(a) \mid a \text{ berechnet } f\}$$

$fnum$  is injektiv: Wenn  $fnum(f_1) = fnum(f_2)$  dann gibt es einen Algorithmus der sowohl  $f_1$  wie auch  $f_2$  berechnet und so  $f_1 = f_2$ .

Aber dann ist  $\mathcal{F}$  abzählbar. **Widerspruch zu Satz 5.8** □

## Verschiedene Formalisierungen des Begriffs der Berechenbarkeit:

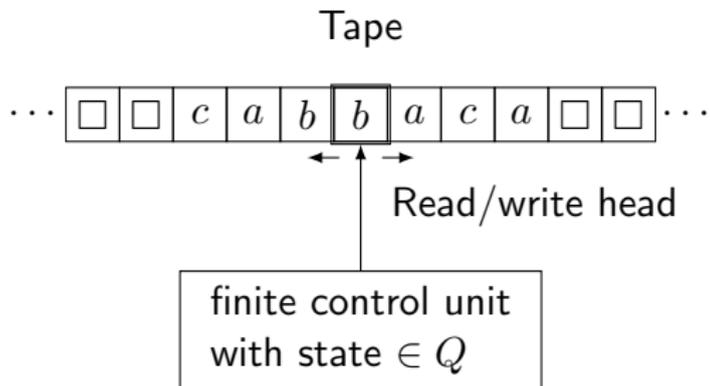
- Turing-Maschinen (Turing 1936)
- $\lambda$ -Kalkül (Church 1936)
- $\mu$ -rekursive Funktionen
- Markov-Algorithmen
- Registermaschinen
- Awk, Basic, C, Dylan, Eiffel, Fortran, Java, Lisp, Modula, Oberon, Pascal, Python, Ruby, Simula, T<sub>E</sub>X, ...-Programme
- while-Programme
- goto-Programme
- DNA-Algorithmen
- Quantenalgorithmen
- ...

Es wurde bewiesen: Alle diese Beschreibungsmethoden sind in ihrer Mächtigkeit äquivalent.

### **Churchsche These / Church-Turing These**

Der formale Begriff der Berechenbarkeit mit Turing-Maschinen (bzw  $\lambda$ -Kalkül etc) stimmt mit dem intuitiven Berechenbarkeitsbegriff überein.

Die Church-Turing-These ist keine formale Aussage und so nicht beweisbar. Sie wird jedoch allgemein akzeptiert.



## Definition 5.10

Eine **Turingmaschine (TM)** ist ein 7-Tupel

$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \square, F)$  so dass

- $Q$  ist eine endliche Menge von **Zuständen**.
- $\Sigma$  ist eine endliche Menge, das **Eingabealphabet**.
- $\Gamma$  ist eine endliche Menge, das **Bandalphabet**, mit  $\Sigma \subset \Gamma$
- $\delta : Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L, R, N\}$  ist die **Übergangsfunktion**.  
 $\delta$  darf partiell sein.
- $q_0 \in Q$  ist der **Startzustand**.
- $\square \in \Gamma \setminus \Sigma$  ist das **Leerzeichen**.
- $F \subseteq Q$  ist die Menge der **akzeptierenden** oder **Endzustände**.

**Annahme:**  $\delta(q, a)$  ist nicht definiert für alle  $q \in F$  und  $a \in \Gamma$ .

Eine **nichtdeterministische** Turingmaschine hat eine Übergangsfunktion  $\delta : Q \times \Gamma \rightarrow \mathcal{P}(Q \times \Gamma \times \{L, R, N\})$ .

Intuitiv bedeutet  $\delta(q, a) = (q', b, D)$ :

- Wenn sich  $M$  im Zustand  $q$  befindet,
- und auf dem Band  $a$  liest,
- so geht  $M$  im nächsten Schritt in den Zustand  $q'$  über,
- überschreibt  $a$  mit  $b$ ,
- und bewegt danach den Schreib-/Lesekopf nach **rechts** (falls  $D = R$ ), nach **links** (falls  $D = L$ ), oder **nicht** (falls  $D = N$ ).

### Definition 5.11

Eine **Konfiguration** einer Turingmaschine ist ein Tripel  $(\alpha, q, \beta) \in \Gamma^* \times Q \times \Gamma^*$ .

Dies modelliert

- Bandinhalt:  $\dots \square \alpha \beta \square \dots$
- Zustand:  $q$
- Kopf auf dem ersten Zeichen von  $\beta \square$

Die **Startkonfiguration** der Turingmaschine bei Eingabe  $w \in \Sigma^*$  ist  $(\epsilon, q_0, w)$ .

Die Berechnung der TM  $M$  wird als Relation  $\rightarrow_M$  auf Konfigurationen formalisiert. Falls  $\delta(q, first(\beta)) = (q', c, D)$ :

$$(\alpha, q, \beta) \rightarrow_M \begin{cases} (\alpha, q', c \text{ rest}(\beta)) & \text{falls } D = N \\ (\alpha c, q', \text{rest}(\beta)) & \text{falls } D = R \\ (\text{butlast}(\alpha), q', \text{last}(\alpha) c \text{ rest}(\beta)) & \text{falls } D = L \end{cases}$$

wobei

$$\begin{aligned} first(aw) &= a & first(\epsilon) &= \square \\ rest(aw) &= w & rest(\epsilon) &= \epsilon \\ last(wa) &= a & last(\epsilon) &= \square \\ butlast(wa) &= w & butlast(\epsilon) &= \epsilon \end{aligned}$$

für  $a \in \Gamma$  und  $w \in \Gamma^*$ .

Falls  $M$  nichtdeterministisch ist:  $\delta(q, first(\beta)) \ni (q', c, D)$

## Beispiel 5.12 (Unär +1)

$$M = (\{q, f\}, \{1\}, \{1, \square\}, \delta, q, \square, \{f\})$$

$$\delta(q, \square) = (f, 1, N)$$

$$\delta(q, 1) = (q, 1, R)$$

- Beispiellauf:

$$(\epsilon, q, 11) \rightarrow_M$$

## Beispiel 5.13 (Binär +1)

ZB  $1011 \mapsto 1100$

$$M = (\{q_0, q_1, q_2, q_f\}, \{0, 1\}, \{0, 1, \square\}, \delta, q_0, \square, \{q_f\})$$

wobei

$$\begin{aligned} \delta(q_0, 0) &= (q_0, 0, R) & \delta(q_1, 1) &= (q_1, 0, L) & \delta(q_2, 0) &= (q_2, 0, L) \\ \delta(q_0, 1) &= (q_0, 1, R) & \delta(q_1, 0) &= (q_2, 1, L) & \delta(q_2, 1) &= (q_2, 1, L) \\ \delta(q_0, \square) &= (q_1, \square, L) & \delta(q_1, \square) &= (q_f, 1, N) & \delta(q_2, \square) &= (q_f, \square, R) \end{aligned}$$

Beispiellauf:

$$\begin{aligned} (\epsilon, q_0, 101) &\rightarrow_M (1, q_0, 01) \rightarrow_M (10, q_0, 1) \rightarrow_M (101, q_0, \epsilon) \rightarrow_M \\ (10, q_1, 1\square) &\rightarrow_M (1, q_1, 00\square) \rightarrow_M \\ (\epsilon, q_2, 110\square) &\rightarrow_M (\epsilon, q_2, \square 110\square) \rightarrow_M \\ (\square, q_f, 110\square) & \end{aligned}$$

## Definition 5.14

Eine Turingmaschine  $M$  **akzeptiert** die Sprache

$$L(M) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists q \in F, \alpha, \beta \in \Gamma^*. (\epsilon, q_0, w) \rightarrow_M^* (\alpha, q, \beta)\}$$

Eine Funktion  $f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$  heißt **Turing-berechenbar** gdw es eine Turingmaschine  $M$  gibt, so dass für alle  $n_1, \dots, n_k, m \in \mathbb{N}$  gilt

$$\begin{aligned} f(n_1, \dots, n_k) = m &\iff \\ \exists r \in F. (\epsilon, q_0, \text{bin}(n_1)\#\text{bin}(n_2)\#\dots\#\text{bin}(n_k)) & \\ \rightarrow_M^* (\square\dots\square, r, \text{bin}(m)\square\dots\square) & \end{aligned}$$

wobei  $\text{bin}(n)$  die Binärdarstellung der Zahl  $n$  ist.

Eine Funktion  $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$  heißt **Turing-berechenbar** gdw es eine Turingmaschine  $M$  gibt, so dass für alle  $u, v \in \Sigma^*$  gilt

$$f(u) = v \iff \exists r \in F. (\epsilon, q_0, u) \rightarrow_M^* (\square\dots\square, r, v\square\dots\square)$$

## Zum Halten/Terminieren von TM

Eine TM **hält** wenn sie eine Konfiguration  $(\alpha, q, a\beta)$  erreicht und  $\delta(q, a)$  nicht definiert oder (bei nichtdeterministische TM)  
 $\delta(q, a) = \emptyset$ .

Nach Annahme hält eine TM immer, wenn sie einen Endzustand erreicht. Damit ist die von einer TM berechnete Funktion wohldefiniert.

Eine TM kann auch halten, bevor sie einen Endzustand erreicht.

## Satz 5.15

*Zu jeder nichtdeterministischen TM  $N$  gibt es eine deterministische TM  $M$  mit  $L(N) = L(M)$ .*

### Beweis:

$M$  durchsucht den Baum der Berechnungen von  $N$  in *Breitensuche*, beginnend mit der Startkonfiguration  $(\epsilon, q_0, w)$ , eine Ebene nach der anderen.

Gibt es in dem Baum (auf Ebene  $n$ ) eine Konfigurationen mit Endzustand, so wird diese (nach Zeit  $O(c^n)$ ) gefunden. □

## Satz 5.16

*Die von Turingmaschinen akzeptierten Sprachen sind genau die Typ-0-Sprachen der Chomsky Hierarchie.*

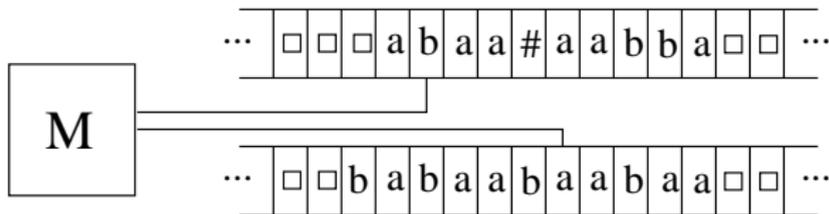
### Beweis:

Wir beschreiben nur die Beweisidee. (Mehr Details: [Schöning]).

„ $\implies$ “: Grammatikregeln können direkt die Rechenregeln einer TM simulieren.

„ $\impliedby$ “: Die (nichtdeterministische) TM versucht von ihrer Eingabe aus das Startsymbol der Grammatik zu erreichen, indem sie die Produktionen der Grammatik von rechts nach links anwendet, (nichtdeterministisch) an jeder möglichen Stelle. □

Eine beliebige Modellvariante ist die  $k$ -Band-Turingmaschine:



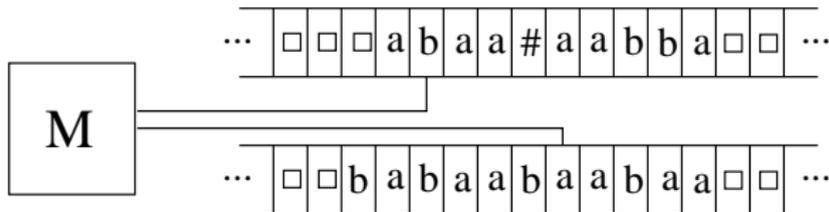
Die  $k$  Köpfe sind völlig unabhängig voneinander:

$$\delta : Q \times \Gamma^k \rightarrow Q \times \Gamma^k \times \{L, R, N\}^k$$

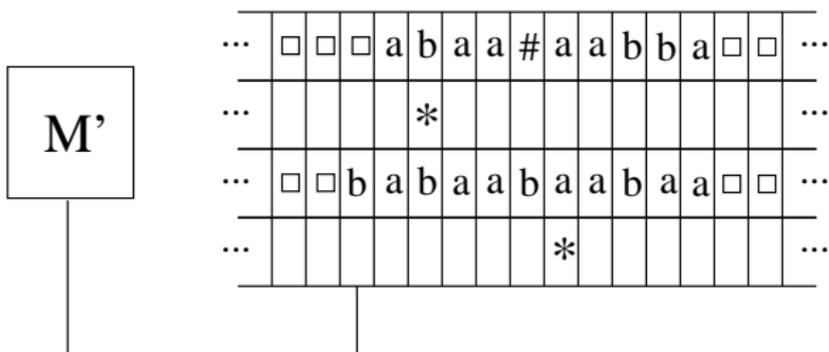
## Satz 5.17

Jede  $k$ -Band-Turingmaschine kann effektiv durch eine 1-Band-TM simuliert werden.

Beweisidee: Aus



wird



## Beweisskizze:

- $\Gamma' := (\Gamma \times \{\star, \square\})^k$
- $M'$  simuliert einen  $M$ -Schritt durch mehrere Schritte:  $M'$ 
  - startet mit Kopf links von allen  $\star$ .
  - geht nach rechts bis alle  $\star$  überschritten sind, und merkt sich dabei (in  $Q'$ ) die Zeichen über jedem  $\star$ .
  - hat jetzt alle Information, um  $\delta_M$  anzuwenden.
  - geht nach links über alle  $\star$  hinweg und führt dabei  $\delta_M$  aus.

Beobachtung:

$n$  Schritte von  $M$  lassens sich durch  
 $O(n^2)$  Schritte von  $M'$  simulieren.

Denn nach  $n$  Schritten von  $M$  trennen  $\leq 2n$  Felder linken und rechten Kopf. Obige Simulation eines  $M$ -Schritts braucht daher  $O(n)$   $M'$ -Schritte. Simulation von  $n$  Schritten:  $O(n^2)$  Schritte.

Die folgenden Basismaschinen sind leicht programmierbar:

- $\text{Band } i := \text{Band } i + 1$
- $\text{Band } i := \text{Band } i - 1$
- $\text{Band } i := 0$
- $\text{Band } i := \text{Band } j$

Seien  $M_i = (Q_i, \Sigma, \Gamma_i, \delta_i, q_i, \square, F_i)$ ,  $i = 1, 2$ .

Die **sequentielle Komposition** (Hintereinanderschaltung) von  $M_1$  und  $M_2$  bezeichnen wir mit

$$\longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow$$

Sie ist wie folgt definiert:

$$M := (Q_1 \cup Q_2, \Sigma, \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \delta, q_1, \square, F_2)$$

wobei (oE)  $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$  und

$$\delta := \delta_1 \cup \delta_2 \cup \{(f_1, a) \mapsto (q_2, a, N) \mid f_1 \in F_1, a \in \Gamma_1\}$$

Sind  $f_1$  und  $f_2$  Endzustände von  $M$  so bezeichnet

$$\begin{array}{c} \longrightarrow M \xrightarrow{f_1} M_1 \longrightarrow \\ \downarrow f_2 \\ M_2 \\ \downarrow \end{array}$$

eine **Fallunterscheidung**, dh eine TM, die vom Endzustand  $f_1$  von  $M$  nach  $M_1$  übergeht, und von  $f_2$  aus nach  $M_2$ .

Die folgende TM nennen wir „Band=0?“ (bzw „Band  $i = 0$ ?“):

$$\begin{aligned} \delta(q_0, 0) &= (q_0, 0, R) \\ \delta(q_0, \square) &= (ja, \square, L) \\ \delta(q_0, a) &= (nein, a, N) \quad \text{für } a \neq 0, \square \end{aligned}$$

wobei  $ja$  und  $nein$  Endzustände sind.

Analog zur Fallunterscheidung kann man auch eine TM für eine **Schleife** konstruieren

$$\begin{array}{c} \longrightarrow \text{Band } i = 0? \xrightarrow{\text{ja}} \\ \uparrow \downarrow \text{nein} \\ M \end{array}$$

die sich wie `while Band  $i \neq 0$  do  $M$`  verhält.

**Moral:** Mit TM kann man imperativ programmieren:

```
:=  
;  
if  
while
```

- WHILE  $\equiv$  strukturierte Programme  
mit while-Schleifen
- GOTO  $\equiv$  Assembler

Wir definieren WHILE- und GOTO-Berechenbarkeit und zeigen ihre Äquivalenz mit Turing-Berechenbarkeit.

Syntax von WHILE-Programmen:

$$\begin{aligned} P &\rightarrow X := X + C \\ &| X := X - C \\ &| P ; P \\ &| \text{IF } X = 0 \text{ DO } P \text{ ELSE } Q \text{ END} \\ &| \text{WHILE } X \neq 0 \text{ DO } P \text{ END} \end{aligned}$$

wobei  $X$  eine der Variablen  $x_0, x_1, \dots$  und  $C$  eine der Konstanten  $0, 1, \dots$  sein kann.

### Beispiel 5.18

WHILE  $x_2 \neq 0$  DO  $x_1 := x_0 + 1$  END

Die **modifizierte Differenz** ist  $m \dot{-} n := \begin{cases} m - n & \text{falls } m \geq n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Semantik von WHILE-Programmen (informell):

$x_i := x_j + n$  Neuer Wert von  $x_i$  ist  $x_j + n$ .

$x_i := x_j - n$  Neuer Wert von  $x_i$  ist  $x_j \dot{-} n$ .

$P_1 ; P_2$  Führe zuerst  $P_1$  und dann  $P_2$  aus.

**WHILE**  $x_i \neq 0$  **DO**  $P$  **END** Führe  $P$  bis die Variable  $x_i$  (wenn je) den Wert 0 annimmt.

### Beispiel 5.19

**WHILE**  $x_1 \neq 0$  **DO**  $x_2 := x_2 + 1; x_1 := x_1 - 1$  **END**  
simuliert

Zu Beginn der Ausführung stehen die Eingaben in  $x_1, \dots, x_k$ .

Alle anderen Variablen sind 0. Die Ausgabe wird in  $x_0$  berechnet.

## Syntaktische Abkürzungen („Zucker“):

$$x_i := x_j \equiv x_i := x_j + 0$$

$$x_i := n \equiv x_i := x_j + n$$

( $x_j$  wird sonst nirgends benutzt)

$$x_i := x_j + x_k \equiv x_i := x_j; x_\ell := x_k$$

( $i \neq k$ )

WHILE  $x_k \neq 0$  DO

$$x_i := x_i + 1; x_k := x_k - 1$$

END;

$$x_k := x_\ell$$

( $x_\ell$  wird sonst nirgends benutzt)

$$x_i := x_j * x_k \equiv x_i := 0; x_\ell := x_k$$

( $i \neq j, k$ )

WHILE  $x_k \neq 0$  DO

$$x_i := x_i + x_j; x_k := x_k - 1$$

END;

$$x_k := x_\ell$$

( $x_\ell$  wird sonst nirgends benutzt)

DIV, MOD, IF  $x = n$  THEN  $P$  END,

IF  $x = n$  AND  $y = m$  THEN  $P$  END ...

### Definition 5.20

Eine **totale** Funktion  $f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$  ist **WHILE-berechenbar** gdw es ein WHILE-Programm  $P$  gibt, so dass für alle  $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ :

$P$ , gestartet mit  $n_1, \dots, n_k$  in  $x_1, \dots, x_k$  (0 in den anderen Var.) terminiert mit  $f(n_1, \dots, n_k)$  in  $x_0$ .

### Definition 5.21

Eine **partielle** Funktion  $f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$  ist **WHILE-berechenbar** gdw es ein WHILE-Programm  $P$  gibt, so dass für alle  $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ :

$P$ , gestartet mit  $n_1, \dots, n_k$  in  $x_1, \dots, x_k$  (0 in den anderen Var.)

- terminiert mit  $f(n_1, \dots, n_k)$  in  $x_0$ , falls  $f(n_1, \dots, n_k)$  definiert ist,
- terminiert nicht, falls  $f(n_1, \dots, n_k)$  undefiniert ist.

Turingmaschinen können WHILE-Programme simulieren:

### Satz 5.22 (WHILE $\rightarrow$ TM)

*Jede WHILE-berechenbare Funktion ist auch Turing-berechenbar.*

#### Beweis:

Jede Programmvariable wird auf einem eigenen Band gespeichert. Wir haben bereits gezeigt: Alle Konstrukte der WHILE-Sprache können von einer Mehrband-TM simuliert werden, und eine Mehrband-TM kann von einer 1-Band TM simuliert werden. □

GOTO

TM

WHILE



Übersetzungen

Ein **GOTO-Programm** ist eine Sequenzen von markierten Anweisungen

$$M_1 : A_1; M_2 : A_2; \dots; M_k : A_k$$

(wobei alle Marken verschieden und optional sind)

Mögliche Anweisungen  $A_i$  sind:

$$x_i := x_j + n$$

$$x_i := x_j - n$$

GOTO  $M_i$

IF  $x_i = n$  GOTO  $M_j$

HALT

Die Semantik ist wie erwartet.

### Fakt 5.23 (WHILE $\rightarrow$ GOTO)

*Jedes WHILE-Programm kann durch ein GOTO-Programm simuliert werden.*

## Satz 5.24 (GOTO $\rightarrow$ WHILE)

Jedes GOTO-Programm kann durch ein WHILE-Programm simuliert werden.

**Beweis:** Simuliere  $M_1 : A_1; M_2 : A_2; \dots; M_k : A_k$  durch

```
pc := 1;
WHILE pc  $\neq$  0 DO
  IF pc = 1 THEN  $P_1$  ELSE
    :
  IF pc = k THEN  $P_k$  ELSE pc := 0
END
```

wobei  $A_i \mapsto P_i$  wie folgt definiert ist:

$x_i := x_j +/- n$	$\mapsto$	$x_i := x_j +/- n; pc := pc + 1$
GOTO $M_i$	$\mapsto$	$pc := i$
IF $x_j = 0$ GOTO $M_i$	$\mapsto$	IF $x_j = 0$ THEN $pc := i$ ELSE $pc := pc + 1$ END
HALT	$\mapsto$	$pc := 0$



## Korollar 5.25

*WHILE- und GOTO-Berechenbarkeit sind äquivalent.*

## Korollar 5.26 (Kleenesche Normalform)

*Jedes WHILE-Programm ist zu einem WHILE-Programm mit genau einer WHILE-Schleife äquivalent.*



Übersetzungen

## Satz 5.27 (TM $\rightarrow$ GOTO)

Jede TM kann durch ein GOTO-Programm simuliert werden.

Übersetzung: TM  $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \square, F) \rightarrow$  GOTO-Programm.

$$Q = \{q_0, \dots, q_k\} \quad \Gamma = \{a_0(= \square), \dots, a_n\}$$

Eine Konfiguration

$$(a_{i_p} \dots a_{i_1}, q_l, a_{j_1} \dots a_{j_q})$$

wird durch die Programmvariablen  $x, y, z$  wie folgt repräsentiert:

$$x = (i_p \dots i_1)_b, \quad y = (j_q \dots j_1)_b, \quad z = l$$

wobei  $(i_p \dots i_1)_b$  die Zahl  $i_p \dots i_1$  zur Basis  $b := n + 1$  ist:

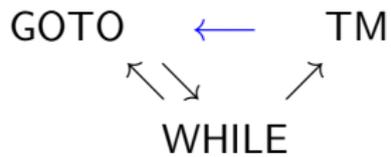
$$x = \sum_{r=1}^p i_r b^{r-1}$$

Der Kern des GOTO-Programms ist die iterierte Simulation von  $\delta$ :

```
M:   IF  $z \in F$  GOTO  $M_{end}$ ;  
      $a := y \text{ MOD } b$ ;  
     IF  $z = 0$  AND  $a = 0$  GOTO  $M_{00}$ ;  
     IF  $z = 0$  AND  $a = 1$  GOTO  $M_{01}$ ;  
     ...  
     IF  $z = k$  AND  $a = n$  GOTO  $M_{kn}$ ;  
 $M_{00}$ :  $P_{00}$ ; GOTO  $M$ ;  
 $M_{01}$ :  $P_{01}$ ; GOTO  $M$ ;  
     ...  
 $M_{kn}$ :  $P_{kn}$ ; GOTO  $M$ 
```

wobei  $P_{ij}$  die Simulation von  $\delta(q_i, a_j) = (q_r, a_s, D)$  ist. Für  $D = L$ :

$z := r$ ;	Zustand aktualisieren
$y := y \text{ DIV } b$ ;	Löschen von $a_j$
$y := b*y + s$ ;	Schreiben von $a_s$
$y := b*y + (x \text{ MOD } b)$ ;	Bewegung $L$ (I): Einfügen von $a_{i_1}$ in $y$
$x := x \text{ DIV } b$	Bewegung $L$ (II): Löschen von $a_{i_1}$ aus $x$



Übersetzungen

## 5.2 Unentscheidbarkeit des Halteproblems

**Ziel:** Es ist **unentscheidbar** ob ein Programm terminiert.

### Definition 5.28

Eine Menge  $A$  ( $\subseteq \mathbb{N}$  oder  $\Sigma^*$ ) heißt **entscheidbar** gdw ihre **charakteristische Funktion**

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A \\ 0 & \text{falls } x \notin A \end{cases}$$

berechenbar ist.

Eine Eigenschaft/Problem  $P(x)$  heißt **entscheidbar** gdw  $\{x \mid P(x)\}$  **entscheidbar** ist.

### Fakt 5.29

*Die entscheidbaren Mengen sind abgeschlossen unter Komplement:  
Ist  $A$  entscheidbar, dann auch  $\overline{A}$ .*

## Kodierung einer TM als Wort über $\Sigma = \{0, 1\}$ , exemplarisch:

- Sei  $\Gamma = \{a_0, \dots, a_k\}$  und  $Q = \{q_0, \dots, q_n\}$ .
- $\delta(q_i, a_j) = (q_{i'}, a_{j'}, d)$  wird kodiert als

$$\#bin(i)\#bin(j)\#bin(i')\#bin(j')\#bin(m)$$

wobei  $bin : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}^*$  die Binärcodierung einer Zahl ist und  $m = 0/1/2$  falls  $d = L/R/N$ .

- Kodierung von  $\delta$ : Konkatenation der Kodierungen aller  $\delta(.,.) = (.,.,.)$ , in beliebiger Reihenfolge.
- Kodierung von  $\{0, 1, \#\}^*$  in  $\{0, 1\}^*$ :

$$0 \mapsto 00$$

$$1 \mapsto 01$$

$$\# \mapsto 11$$

Nicht jedes Wort über  $\{0, 1\}^*$  kodiert eine TM.

Sei  $\hat{M}$  eine beliebige feste TM.

### Definition 5.30

Die zu einem Wort  $w \in \{0, 1\}^*$  gehörige TM  $M_w$  ist

$$M_w := \begin{cases} M & \text{falls } w \text{ Kodierung von } M \text{ ist} \\ \hat{M} & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Kodierung von syntaktischen Objekten (Programmen, Formeln, etc) als Zahlen nennt man **Gödelisierung** und die Zahlen **Gödelnummern**.

### Definition 5.31

$M[w]$  ist Abk. für „Maschine  $M$  mit Eingabe  $w$ “

$M[w]\downarrow$  bedeutet, dass  $M[w]$  terminiert/hält.

### Definition 5.32 (Spezielles Halteproblem)

**Gegeben:** Ein Wort  $w \in \{0, 1\}^*$ .

**Problem:** Hält  $M_w$  bei Eingabe  $w$  ?

Als Menge:

$$K := \{w \in \{0, 1\}^* \mid M_w[w]\downarrow\}$$

### Satz 5.33

Das spezielle Halteproblem ist nicht entscheidbar.

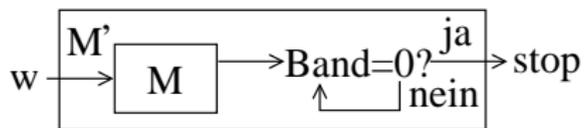
Beweis:

Angenommen,  $K$  sei entscheidbar, dh  $\chi_K$  ist berechenbar.

Dann ist auch folgende Funktion  $f$  berechenbar:

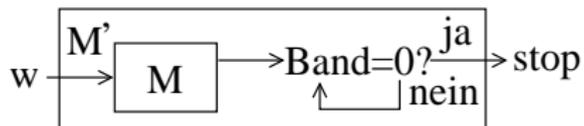
$$f(w) := \begin{cases} 0 & \text{falls } \chi_K(w) = 0 \\ \perp & \text{falls } \chi_K(w) = 1 \end{cases}$$

Denn berechnet eine TM  $M$  die Funktion  $\chi_K$ ,  
so berechnet die folgende TM  $M'$  die Funktion  $f$ :



Dann gibt es ein  $w'$  mit  $M_{w'} = M'$ .

## Beweis (Forts.):



$$\begin{aligned} f(w') = \perp &\Leftrightarrow \chi_K(w') = 1 && \text{(Def. von } f) \\ &\Leftrightarrow w' \in K && \text{(Def. von } \chi_K) \\ &\Leftrightarrow M_{w'}[w'] \downarrow && \text{(Def. von } K) \\ &\Leftrightarrow M'[w'] \downarrow && (M_{w'} = M') \\ &\Leftrightarrow f(w') \neq \perp && (M' \text{ berechnet } f) \end{aligned}$$

Wir erhalten einen Widerspruch:  $f(w') = \perp \Leftrightarrow f(w') \neq \perp$ .  
Die Annahme,  $K$  sei entscheidbar, ist damit falsch. □

## Definition 5.34 ((Allgemeines) Halteproblem)

**Gegeben:** Wörter  $w, x \in \{0, 1\}^*$ .

**Problem:** Hält  $M_w$  bei Eingabe  $x$  ?

Als Menge:

$$H := \{w\#x \mid M_w[x]\downarrow\}$$

## Satz 5.35

*Das Halteproblem  $H$  ist nicht entscheidbar.*

**Beweis:**

Wäre  $H$  entscheidbar, dann trivialerweise auch  $K$ :

$$\chi_K(w) = \chi_H(w, w)$$



### Definition 5.36 (Reduktion)

Eine Menge  $A \subseteq \Sigma^*$  ist **reduzierbar** auf eine Menge  $B \subseteq \Gamma^*$  gdw es eine totale und berechenbare Funktion  $f : \Sigma^* \rightarrow \Gamma^*$  gibt mit

$$\forall w \in \Sigma^*. w \in A \Leftrightarrow f(w) \in B$$

Wir schreiben dann  $A \leq B$ .

#### Intuition:

- $B$  ist mindestens so schwer zu lösen wie  $A$ .
- Ist  $A$  unentscheidbar, dann auch  $B$ .
- Ist  $B$  entscheidbar, dann erst recht  $A$ .

### Lemma 5.37

Falls  $A \leq B$  und  $B$  ist entscheidbar, so ist auch  $A$  entscheidbar.

#### Beweis:

Es gelte  $A \leq B$  mittels  $f$  und  $\chi_B$  sei berechenbar.

Dann ist  $\chi_B \circ f$  berechenbar und  $\chi_A = \chi_B \circ f$ :

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases} = \begin{cases} 1, & f(x) \in B \\ 0, & f(x) \notin B \end{cases} = \chi_B(f(x)) \quad \square$$

### Korollar 5.38

Falls  $A \leq B$  und  $A$  ist unentscheidbar, dann ist auch  $B$  unentscheidbar.

### Beispiel 5.39

Da  $K \leq H$  (mit Reduktion  $f(w) := w\#w$ ) und  $K$  unentscheidbar ist, ist auch  $H$  unentscheidbar.

## Satz 5.40

Das Halteproblem auf leerem Band,  $H_0$ , ist unentscheidbar.

$$H_0 := \{w \in \{0, 1\}^* \mid M_w[\epsilon] \downarrow\}$$

### Beweis:

Wir zeigen  $K \leq H_0$  mit einer Funktion  $f : \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^*$   
 $f(w)$  ist die Kodierung folgender TM:

Überschreibe die Eingabe mit  $w$ ; führe  $M_w$  aus.

Dh  $f$  berechnet aus  $w$  die Kodierung  $w_1$  einer TM, die  $w$  schreibt,  
und gibt die Kodierung von " $w_1; w$ " zurück.

Damit ist  $f$  total und berechenbar.

Es gilt:

$$w \in K \Leftrightarrow M_w[w] \downarrow \Leftrightarrow M_{f(w)}[\epsilon] \downarrow \Leftrightarrow f(w) \in H_0$$



## Fazit:

Es gibt keine allgemeine algorithmische Methode, um zu entscheiden, ob ein Programm terminiert.

Die Unentscheidbarkeit vieler Fragen über die Ausführung von Programmen folgt durch Reduktion des Halteproblems:

- Kann ein WHILE-Programm mit einer bestimmten Eingabe einen bestimmten Programmpunkt erreichen?  
Der Spezialfall Programmpunkt=Programmende ist das Halteproblem.
- Kann Variable  $x_7$  bei einer bestimmten Eingabe je den Wert  $2^{32}$  erreichen?

Reduktion: Ein Programm  $P$  hält gdw während der Ausführung von

$$P; x_7 := 2^{32}$$

Variable  $x_7$  den Wert  $2^{32}$  erreicht.

(OE:  $x_7$  kommt in  $P$  nicht vor)

## Quiz

Ist es entscheidbar, ob eine TM

- 1 mehr als 314 Zustände hat?
- 2 bei Eingabe  $\epsilon$  mehr als 314 Schritte macht?
- 3 bei *irgendeiner* Eingabe mehr als 314 Schritte macht?
- 4 bei *allen* Eingaben mehr als 314 Schritte macht?
- 5 bei Eingabe  $\epsilon$  ihren Kopf mehr als 314 Felder von der 0-Position entfernen kann?
- 6 bei Eingabe  $\epsilon$  einen bestimmten Zustand erreichen kann?
- 7 *irgendeine* Eingabe akzeptieren kann?

Es müssen nicht immer TM sein:

### Satz 5.41 (Matiyasevich 1970, Hilberts 10. Problem)

*Es ist unentscheidbar, ob ein Polynom in  $n$  Variablen mit ganzzahligen Koeffizienten eine ganzzahlige Nullstelle hat ( $\in \mathbb{Z}^n$ ).*

Beweis:

$$H \leq H_{10}$$



## Bemerkungen

- Nicht alle unentscheidbaren Probleme sind gleich schwer
- ZB gilt: Das Äquivalenzproblem

$$Eq := \{u\#v \mid M_u \text{ berechnet die gleiche Funktion wie } M_v\}$$

ist schwerer als das Halteproblem:

$$H \leq Eq \quad \text{aber} \quad Eq \not\leq H$$

## 5.3 Semi-Entscheidbarkeit

### Definition 5.42

Eine Menge  $A$  ( $\subseteq \mathbb{N}$  oder  $\Sigma^*$ ) heißt **semi-entscheidbar (s-e)** gdw

$$\chi'_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A \\ \perp & \text{falls } x \notin A \end{cases}$$

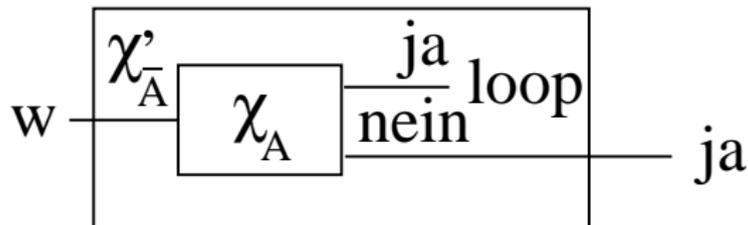
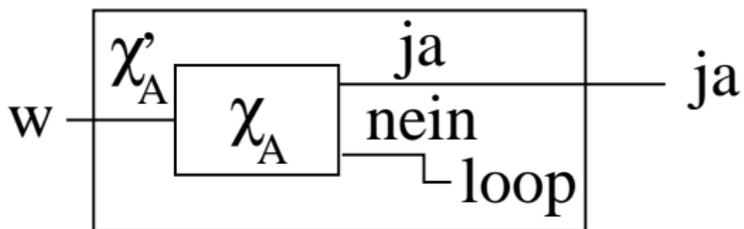
berechenbar ist.

### Satz 5.43

Eine Menge  $A$  ist entscheidbar gdw sowohl  $A$  als auch  $\bar{A}$  s-e sind.

Beweis:

„ $\Rightarrow$ “: Wandle TM für  $\chi_A$  in TM für  $\chi'_A$  und  $\chi'_{\bar{A}}$  um:



## Beweis (Forts.):

„ $\Leftarrow$ “:

Wandle TM  $M_1$  für  $\chi'_A$  und TM  $M_2$  für  $\chi'_{\bar{A}}$  in TM für  $\chi_A$  um:

input( $x$ );

**for**  $s := 0, 1, 2, \dots$  **do**

**if**  $M_1[x]$  hält in  $s$  Schritten **then** output(1); **halt fi** ;

**if**  $M_2[x]$  hält in  $s$  Schritten **then** output(0); **halt fi**

Formulierung mit Parallelismus:

input( $x$ );

führe  $M_1[x]$  und  $M_2[x]$  parallel aus;

hält  $M_1$ , gib 1 aus, hält  $M_2$ , gib 0 aus. □

## Lemma 5.44

*Ist  $A \leq B$  und ist  $B$  s-e, so ist auch  $A$  s-e.*

Beweis: Übung

### Definition 5.45

Eine Menge  $A$  heißt **rekursiv aufzählbar** (*recursively enumerable*) gdw  $A = \emptyset$  oder es eine berechenbare totale Funktion  $f : \mathbb{N} \rightarrow A$  gibt, so dass

$$A = \{f(0), f(1), f(2), \dots\}$$

### Bemerkung:

- Es dürfen Elemente doppelt auftreten ( $f(i) = f(j)$  für  $i \neq j$ )
- Die Reihenfolge ist beliebig.

### Warnung: Rekursiv aufzählbar $\neq$ abzählbar!

- Rekursiv aufzählbar  $\implies$  abzählbar
- Aber nicht umgekehrt:  
jede Sprache ist abzählbar aber nicht jede Sprache ist rekursiv aufzählbar (s.u.)

## Lemma 5.46

*Eine Menge  $A$  ist rekursiv aufzählbar gdw sie semi-entscheidbar ist.*

### Beweis:

Der Fall  $A = \emptyset$  ist trivial. Sei  $A \neq \emptyset$ .

„ $\Rightarrow$ “: Sei  $A$  rekursiv aufzählbar mit  $f$ . Dann ist  $A$  semi-entscheidbar:

input( $x$ );

**for**  $i := 0, 1, 2, \dots$  **do**

**if**  $f(i) = x$  **then** output(1); **halt fi**

„ $\Leftarrow$ “: O.B.d.A. nehmen wir  $A \subseteq \mathbb{N}$  an.

Sei  $A$  semi-entscheidbar durch (zB) GOTO-Programm  $P$ .

Problem:  $P[i]$  muss nicht halten und darf daher nur

„zeitbeschränkt“ ausgeführt werden.

Gesucht: Paare  $(i, j)$  so dass  $P[i]$  nach  $j$  Schritten hält.

## Beweis (Forts.):

Idee: Wir benutzen eine geeignete Bijektion  $c: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$ .

Seien  $p_1: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  und  $p_2: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  mit

$$p_1(c(n_1, n_2)) = n_1 \quad \text{und} \quad p_2(c(n_1, n_2)) = n_2$$

(Umkehrung von  $c$ ).

Sei  $d \in A$  beliebig.

Folgender Algorithmus berechnet eine Aufzählung von  $A$ :

input( $n$ );

**if**  $P[p_1(n)]$  hält nach  $p_2(n)$  Schritten **then** output( $p_1(n)$ )

**else** output( $d$ ) **fi**

**Korrektheit:** Der Algorithmus hält immer und liefert immer ein Element aus  $A$ .

**Vollständigkeit:** Sei  $a \in A \subseteq \mathbb{N}$ .

Dann hält  $P[a]$  nach einer endlichen Zahl  $k$  von Schritten. Dann liefert die Eingabe  $n = c(a, k)$  die Ausgabe  $a$ . □

Folgende Aussagen sind äquivalent:

- $A$  ist semi-entscheidbar
- $A$  ist rekursiv aufzählbar
- $\chi'_A$  ist berechenbar
- $A = L(M)$  für eine TM  $M$
- $A$  ist Definitionsbereich einer berechenbaren Funktion
- $A$  ist Wertebereich einer berechenbaren Funktion

## Satz 5.47

Die Menge  $K = \{w \mid M_w[w] \downarrow\}$  ist semi-entscheidbar.

### Beweis:

Die Funktion  $\chi'_K$  ist wie folgt Turing-berechenbar:

Bei Eingabe  $w$  simuliere die Ausführung von  $M_w[w]$ ;  
gib 1 aus. □

- Hier haben wir benutzt, dass man einen Interpreter/Simulator für Turingmaschinen als Turingmaschine programmieren kann.
- Ein solcher Interpreter wird oft eine **Universelle Turingmaschine** ( $U$ ) genannt.

## Korollar 5.48

$\overline{K}$  ist nicht semi-entscheidbar.

Semi-Entscheidbarkeit ist nicht abgeschlossen unter Komplement.

## 5.4 Die Sätze von Rice und Shapiro

Die von der TM  $M_w$  berechnete Funktion bezeichnen wir mit  $\varphi_w$ .  
Wir betrachten implizit nur einstellige Funktionen.

### Satz 5.49 (Rice)

*Sei  $F$  eine Menge berechenbarer Funktionen.*

*Es gelte weder  $F = \emptyset$  noch  $F =$  alle ber. Funkt. („ $F$  nicht trivial“)*

*Dann ist unentscheidbar, ob die von einer gegebenen TM  $M_w$  berechnete Funktion Element  $F$  ist, dh ob  $\varphi_w \in F$ .*

**Alle nicht-triviale semantische Eigenschaften von Programmen sind unentscheidbar.**

### Beispiel 5.50

Es ist unentscheidbar, ob ein Programm

- für mindestens eine Eingabe hält.  
( $F = \{\varphi_w \mid \exists x. M_w[x] \downarrow\}$ )
- für alle Eingaben hält.      ( $F = \{\varphi_w \mid \forall x. M_w[x] \downarrow\}$ )
- bei Eingabe 42 Ausgabe 42 produziert.

## Warnung

Es ist entscheidbar, ob ein Programm

- länger als 5 Zeilen ist.
- eine Zuweisung an die Variable  $x_{17}$  enthält.

*Im Satz von Rice geht es um die von einem Programm berechnete Funktion (Semantik), nicht um den Programmtext (Syntax).*

## Beweis:

Wir zeigen  $C_F := \{w \in \{0, 1\}^* \mid \varphi_w \in F\}$  ist unentscheidbar.

**Fall 1:**  $\Omega := (x \mapsto \perp) \notin F$ .

Wähle  $h \in F \neq \emptyset$  beliebig; sei  $u$  Kodierung einer TM mit  $\varphi_u = h$ .

Reduziere  $K$  auf  $C_F$  ( $K \leq C_F$ ) mit  $f : \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^*$  und  $f(w)$  die Kodierung folgender TM:

Speichere die Eingabe  $x$  auf einem getrennten Band;  
schreibe  $w\#w$  auf die Eingabe und führe die universelle TM  $U$  aus;  
führe  $M_u$  auf  $x$  aus.

Es gilt  $\varphi_{f(w)} = \begin{cases} h & \text{falls } M_w[w] \downarrow \\ \Omega & \text{sonst} \end{cases}$  und damit

$$w \in K \Leftrightarrow M_w[w] \downarrow \stackrel{(*)}{\Leftrightarrow} \varphi_{f(w)} \in F \Leftrightarrow f(w) \in C_F$$

$$(*) : \begin{cases} M_w[w] \downarrow \Rightarrow \varphi_{f(w)} = h \in F \\ \varphi_{f(w)} \in F \Rightarrow \varphi_{f(w)} = h \Rightarrow M_w[w] \downarrow \end{cases}$$

Beweis (Forts.):

Fall 2:  $\Omega \in F$ .

Wähle berechenbares  $h \notin F$ .

Zeige analog, dass  $\overline{K} \leq C_F$ .



## Satz 5.51 (Rice-Shapiro)

Sei  $F$  eine Menge berechenbarer Funktionen.

Ist  $C_F := \{w \mid \varphi_w \in F\}$  semi-entscheidbar,

so gilt für alle berechenbaren  $f$ :

$f \in F \Leftrightarrow$  es gibt eine endliche Teilfunktion  $g \subseteq f$  mit  $g \in F$ .

**Beweis:**

„ $\Rightarrow$ “ mit Widerspruch.

Sei  $f \in F$ , so dass für alle endlichen  $g \subseteq f$  gilt  $g \notin F$ .

Wir zeigen  $\overline{K} \leq C_F$  womit  $C_F$  nicht semi-entscheidbar ist.

**Widerspruch**

## Beweis (Forts.):

Reduktion  $\overline{K} \leq C_F$  mit  $h : \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^*$ :

$h(w)$  ist die Kodierung folgender TM:

Bei Eingabe  $t$  simuliere  $t$  Schritte von  $M_w[w]$ .

Hält diese Berechnung in  $\leq t$  Schritten, gehe in eine endlos Schleife, sonst berechne  $f(t)$ .

Wir zeigen

$$w \in \overline{K} \Leftrightarrow h(w) \in C_F$$

- $w \in \overline{K} \implies \neg M_w[w] \downarrow \implies \varphi_{h(w)} = f \in F \implies h(w) \in C_F$
- Falls  $w \notin \overline{K}$  dann hält  $M_w[w]$  nach eine Zahl  $t$  von Schritten. Damit gilt:  $\varphi_{h(w)}$  ist  $f$  eingeschränkt auf  $\{0, \dots, t-1\}$ . Nach Annahme folgt  $\varphi_{h(w)} \notin F$ , dh  $h(w) \notin C_F$ .

## Beweis (Forts.):

„ $\Leftarrow$ “ mit Widerspruch.

Sei  $f$  berechenbar, sei  $g \subseteq f$  endlich mit  $g \in F$ , aber sei  $f \notin F$ .

Wir zeigen  $\overline{K} \leq C_F$  womit  $C_F$  nicht semi-entscheidbar ist.

Reduktion  $\overline{K} \leq C_F$  mit  $h : \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^*$ :

$h(w)$  ist die Kodierung folgender TM:

Bei Eingabe  $t$ , teste ob  $t$  im *endlichen* Def. ber. von  $g$  ist.

Wenn ja, berechne  $f(t)$ ,

sonst simuliere  $M_w[w]$  und berechne dann  $f(t)$ .

Wir zeigen

$$w \in \overline{K} \Leftrightarrow h(w) \in C_F$$

- $w \in \overline{K} \implies \neg M_w[w] \downarrow \implies \varphi_{h(w)} = g \in F \implies h(w) \in C_F$
- $w \notin \overline{K} \implies M_w[w] \downarrow \implies \varphi_{h(w)} = f \notin F \implies h(w) \notin C_F$



Rice-Shapiro (in Kurzform):  $C_F := \{w \mid \varphi_w \in F\}$  s-e  $\implies$   
 $f \in F \Leftrightarrow$  es gibt endliche Funkt.  $g \subseteq f$  mit  $g \in F$ .

Ein Programm heißt **terminierend** gdw es für alle Eingaben hält.

### Korollar 5.52

- Die Menge der terminierenden Programme ist nicht semi-entscheidbar.
- Die Menge der nicht-terminierenden Programme ist nicht semi-entscheidbar.

### Beweis:

- $F :=$  Menge aller berechenbaren totalen Funktionen.  
Sei  $f \in F$ . Jede endliche  $g \subseteq f$  ist echt partiell, dh  $g \notin F$ .  
Also kann  $C_F$  nicht semi-entscheidbar sein.
- $F :=$  Menge aller berechenbaren nicht-totalen Funktionen.  
Sei  $f$  total und berechenbar. Damit  $f \notin F$ .  
Aber jede endliche  $g \subseteq f$  ist in  $F$ .  
Also kann  $C_F$  nicht semi-entscheidbar sein.  $\square$

## Grenzen automatischer Terminationsanalyse von Programmen

- Termination ist unentscheidbar (Rice):  
Klare Ja/Nein Antwort unmöglich.
- Termination ist nicht semi-entscheidbar (Rice-Shapiro):  
Es gibt kein Zertifizierungs-Programm,  
das alle terminierenden Programme erkennt.
- Nicht-Termination ist nicht semi-entscheidbar (Rice-Shapiro):  
Es gibt keinen perfekten *Bug Finder*,  
der alle nicht-terminierenden Programme erkennt.

Aber es gibt mächtige heuristische Verfahren, die für relativ viele Programme aus der Praxis (Gerätetreiber)

- Termination beweisen können, oder
- Gegenbeispiele finden können.

## 5.5 Das Postsche Korrespondenzproblem

Gegeben beliebig viele Kopien der 3 „Spielkarten“

001	10	0
00	11	010

gibt es dann eine Folge dieser Karten

...	...
...	...

so dass oben und unten das gleiche Wort steht?

001	10	001	0
00	11	00	010

Kurz: 1,2,1,3.

## Definition 5.53 (Postsche Korrespondenzproblem, *Post's Correspondence Problem, PCP*)

**Gegeben:** Eine endliche Folge  $(x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k)$ , wobei  $x_i, y_i \in \Sigma^+$ .

**Problem:** Gibt es eine Folge von Indizes  $i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, k\}$ ,  $n > 0$ , mit  $x_{i_1} \dots x_{i_n} = y_{i_1} \dots y_{i_n}$ ?

Dann nennen wir  $i_1, \dots, i_n$  eine **Lösung** der **Instanz**  $(x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k)$  des PCP Problems.

### Beispiel 5.54

- Hat  $(1, 111), (10111, 10), (10, 0)$  eine Lösung?
- Hat  $(b, ca), (a, ab), (ca, a), (abc, c)$  eine Lösung?
- Hat  $(101, 01), (101, 010), (010, 10)$  eine Lösung?
- Hat  $(10, 101), (011, 11), (101, 011)$  eine Lösung?
- Hat  $(1000, 10), (1, 0011), (0, 111), (11, 0)$  eine Lösung?



Emil Post.

*A Variant of a Recursively Unsolvable Problem.*

Bulletin American Mathematical Society, 1946.

**Emil Leon Post**, 1897 (Polen) – 1954 (NY).



## Lemma 5.55

*Das PCP ist semi-entscheidbar.*

### Beweis:

Zähle die möglichen Lösungen der Länge nach auf, und probiere jeweils, ob es eine wirkliche Lösung ist. □

Wir zeigen nun:

$$H \leq MPCP \leq PCP$$

wobei

### Definition 5.56 (Modifiziertes PCP, MPCP)

**Gegeben:** wie beim PCP

**Problem:** Gibt es eine Lösung  $i_1, \dots, i_n$  mit  $i_1 = 1$ ?

## Satz 5.57

$MPCP \leq PCP$

### Beweis:

Für  $w = a_1 \dots a_n$ :

$$\overline{w} := \#a_1\#a_2\#\dots\#a_n\#$$

$$\overleftarrow{w} := a_1\#a_2\#\dots\#a_n\#$$

$$\overrightarrow{w} := \#a_1\#a_2\#\dots\#a_n$$

$$f((x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k)) := ((\overline{x_1}, \overrightarrow{y_1}), (\overleftarrow{x_1}, \overleftarrow{y_1}), \dots, (\overleftarrow{x_k}, \overrightarrow{y_k}), (\$, \#\$))$$

## Satz 5.58

$$H \leq MPCP$$

### Beweis:

- $(\#, \#q_0u\#)$
- $(a, a)$  für alle  $a \in \Gamma \cup \{\#\}$
- $(qa, q'a')$  falls  $\delta(q, a) = (q', a', N)$   
 $(qa, a'q')$  falls  $\delta(q, a) = (q', a', R)$   
 $(bqa, q'ba')$  falls  $\delta(q, a) = (q', a', L)$ , für alle  $b \in \Gamma$
- $(\#, \square\#)$ ,  $(\#, \#\square)$
- $(aq, q)$ ,  $(qa, q)$  für alle  $q \in F$ ,  $a \in \Gamma$
- $(q\#\#, \#)$  für alle  $q \in F$

Aus  $H \leq PCP$  folgt direkt

### Korollar 5.59

Das PCP ist *unentscheidbar*.

### Korollar 5.60

Das PCP ist auch für  $\Sigma = \{0, 1\}$  unentscheidbar

#### Beweis:

Wir nennen dies das 01-PCP und zeigen  $PCP \leq 01\text{-PCP}$ .

Sei  $\Sigma = \{a_1, \dots, a_m\}$  das Alphabet des gegebenen PCPs.

Abbildung auf ein 01-PCP:  $\widehat{a}_j := 01^j$   
 $\widehat{a_{j_1} \dots a_{j_n}} := \widehat{a_{j_1}} \dots \widehat{a_{j_n}}$

Dann hat  $(x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k)$  eine Lösung gdw  
 $(\widehat{x_1}, \widehat{y_1}), \dots, (\widehat{x_k}, \widehat{y_k})$  eine Lösung hat.

„ $\Rightarrow$ “ klar, „ $\Leftarrow$ “ folgt da  $\hat{\cdot} : \Sigma^* \rightarrow \{0, 1\}^*$  injektive ist:

$$\begin{aligned} \widehat{x_{i_1} \dots x_{i_n}} = \widehat{y_{i_1} \dots y_{i_n}} &\implies \\ x_{i_1} \dots x_{i_n} = y_{i_1} \dots y_{i_n} &\implies x_{i_1} \dots x_{i_n} = y_{i_1} \dots y_{i_n} \end{aligned}$$



## Bemerkungen

- Das PCP ist entscheidbar falls  $|\Sigma| = 1$
- Das PCP ist entscheidbar falls  $k \leq 2$ .
- Das PCP ist unentscheidbar falls  $k \geq 5$ .
- Für  $k = 3, 4$  ist noch offen, ob das PCP unentscheidbar ist.

## 5.6 Unentscheidbare CFG-Probleme

- Für DFAs ist fast alles entscheidbar:  
 $L(A) = \emptyset, L(A) = L(B), \dots$
- Für TMs ist fast nichts entscheidbar:  
 $L(M) = \emptyset, L(M_1) = L(M_2), \dots$
- Für CFGs ist manches entscheidbar ( $L(G) = \emptyset, w \in L(G)$ ),  
und manches **unentscheidbar**.

## Satz 5.61

Für CFGs  $G_1, G_2$  sind folgende Probleme unentscheidbar:

$P_1$ : Ist  $L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$ ?

$P_2$ : Ist  $|L(G_1) \cap L(G_2)| = \infty$  ?

$P_3$ : Ist  $L(G_1) \cap L(G_2)$  kontextfrei?

$P_4$ : Ist  $L(G_1) \subseteq L(G_2)$ ?

$P_5$ : Ist  $L(G_1) = L(G_2)$ ?

## Beweis:

$P_1$ : Ist  $L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$ ?

Reduktion von PCP auf

$P_1 := \{(G_1 \in \text{CFG}, G_2 \in \text{CFG}) \mid L(G_1) \cap L(G_2) \neq \emptyset\}$ .

Beweisidee: Instanz von PCP wird abgebildet auf  $(G_1, G_2)$  die jeweils die Wörter folgender Gestalt erzeugen:

Indexseq<sub>1</sub><sup>R</sup>    Oben<sub>1</sub>    Unten<sub>2</sub><sup>R</sup>    Indexseq<sub>2</sub>

Indexseq<sup>R</sup>    Wort    Wort<sup>R</sup>    Indexseq

Der Schnitt  $L(G_1) \cap L(G_2)$  enthält somit alle Wörter der Gestalt

Indexseq<sub>1</sub><sup>R</sup>    Oben<sub>1</sub>    Unten<sub>2</sub><sup>R</sup>    Indexseq<sub>2</sub>

mit  $\text{Indexseq}_1 = \text{Indexseq}_2$  und  $\text{Oben}_1 = \text{Unten}_2$ .

Diese Wörter sind die Lösungen der Instanz des PCPs.

## Beweis (Forts.):

PCP Instanz  $K = (x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k)$  (über  $\{0, 1\}$ )

wird abgebildet auf  $(G_1, G_2)$  mit:

$$L(G_1) =$$

$$\{ a_{i_n} \cdots a_{i_1} x_{i_1} \cdots x_{i_n} \$ y_{j_m}^R \cdots y_{j_1}^R a_{j_1} \cdots a_{j_m} \mid i_1, \dots, j_m \in [1..k] \}$$

$$L(G_2) =$$

$$\{ a_{i_n} \cdots a_{i_1} b_1 \cdots b_m \$ b_m \cdots b_1 a_{i_1} \cdots a_{i_n} \mid i_1, \dots, i_n \in [1..k] \}$$

$$\begin{aligned} G_2 : \quad S &\rightarrow a_1 S a_1 \mid \cdots \mid a_k S a_k \mid T \\ T &\rightarrow 0T0 \mid 1T1 \mid \$ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_1 : \quad S &\rightarrow A \$ B \\ A &\rightarrow a_1 A x_1 \mid \cdots \mid a_k A x_k \\ A &\rightarrow a_1 x_1 \mid \cdots \mid a_k x_k \\ B &\rightarrow y_1^R B a_1 \mid \cdots \mid y_k^R B a_k \\ B &\rightarrow y_1^R a_1 \mid \cdots \mid y_k^R a_k \end{aligned}$$

Beweis (Forts.):

$$L(G_1) = \{ a_{i_n} \cdots a_{i_1} x_{i_1} \cdots x_{i_n} \$ y_{j_m}^R \cdots y_{j_1}^R a_{j_1} \cdots a_{j_m} \mid \dots \}$$

$$L(G_2) = \{ a_{i_n} \cdots a_{i_1} b_1 \cdots b_m \$ b_m \cdots b_1 a_{i_1} \cdots a_{i_n} \mid \dots \}$$

$\implies$

$$L(G_1) \cap L(G_2) \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists i_1, \dots, i_n. x_{i_1} \cdots x_{i_n} = (y_{i_n}^R \cdots y_{i_1}^R)^R$$

$$\Leftrightarrow \exists i_1, \dots, i_n. x_{i_1} \cdots x_{i_n} = y_{i_1} \cdots y_{i_n}$$

$$\Leftrightarrow \text{PCP Instanz } K \text{ hat eine Lösung}$$

$$\implies PCP \leq P_1$$



Beweis (Forts.):

$P_2$ : Ist  $|L(G_1) \cap L(G_2)| = \infty$  ?

Eine PCP Instanz hat (mind.) eine Lösung gdw es  $\infty$  viele hat.

$\implies$  Reduktion  $PCP \leq P_1$  zeigt auch  $PCP \leq P_2$

$P_3$ : Ist  $L(G_1) \cap L(G_2)$  kontextfrei?

Für  $G_1$  und  $G_2$  aus  $P_1$ : Mit Pumping Lemma beweisbar:

$L(G_1) \cap L(G_2) \neq \emptyset \implies L(G_1) \cap L(G_2)$  ist nicht CFL

Da  $\emptyset$  eine CFL ist, gilt sogar:

$L(G_1) \cap L(G_2) \neq \emptyset \Leftrightarrow L(G_1) \cap L(G_2)$  ist nicht CFL

Damit sind beide Probleme gleich unentscheidbar.

Beweis (Forts.):

$P_4/P_5$ : Ist  $L(G_1) \subseteq L(G_2)$  ?

$L(G_1)$  und  $L(G_2)$  aus  $P_1$  sind DCFL

$\implies$  man kann CFG  $G'_1, G'_2$  berechnen mit  $L(G'_i) = \overline{L(G_i)}$

$G_3 := „G_1 \cup G'_2“$

Reduktionen:  $K \mapsto (G_1, G'_2)/(G_3, G'_2)$  zeigen  $PCP \leq P_4/P_5$ :

$K$  hat keine Lösung

$$\Leftrightarrow L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$$

$$\Leftrightarrow L(G_1) \subseteq L(G'_2)$$

$$\Leftrightarrow L(G_1) \cup L(G'_2) = L(G'_2)$$

$$\Leftrightarrow L(G_3) = L(G'_2)$$



Da  $L(G_1)$  und  $L(G_2)$  aus dem Beweis zu  $P_1$  DCFL sind, gilt sogar:

### Korollar 5.62

*Die Probleme  $P_1$  bis  $P_4$  in Satz 5.61 sind bereits für DCFL unentscheidbar.*

### Theorem 5.63 (Sénizergues 1997)

*Für zwei DPDA  $M_1$  und  $M_2$  ist  $L(M_1) = L(M_2)$  entscheidbar.*

## Satz 5.64

Für eine CFG  $G$  sind folgende Probleme unentscheidbar:

- 1 Ist  $G$  mehrdeutig?
- 2 Ist  $L(G)$  regulär?
- 3 Ist  $L(G)$  deterministisch (DCFL)?

### Beweis:

1. Reduktion von PCP Instanz auf  $G_3 := „G_1 \cup G_2“$ :

Instanz lösbar  $\Leftrightarrow L(G_1) \cap L(G_2) \neq \emptyset \Leftrightarrow L(G_3)$  ist mehrdeutig.

„ $\Rightarrow$ “: Syntaxbäume von  $G_1$  und  $G_2$  disjunkt

„ $\neg \Rightarrow \neg$ “:  $L(G_1), L(G_2)$  sind DCFL und damit nicht mehrdeutig

2/3. Reduktion von PCP Instanz auf  $G_4 := „\overline{G_1} \cup \overline{G_2}“$ .

Instanz unlösbar  $\Rightarrow L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$

$\Rightarrow L(G_4) = \Sigma^* \Rightarrow L(G_4)$  reg/det.

Instanz lösbar  $\Rightarrow L(G_1) \cap L(G_2)$  nicht CFL

$\Rightarrow \overline{L(G_4)}$  nicht reg/det  $\Rightarrow L(G_4)$  nicht reg/det. □

## Satz 5.65

Für eine CFG  $G$  und einen RE  $\alpha$  ist  $L(G) = L(\alpha)$  unentscheidbar.

### Beweis:

Im Beweis des vorherigen Satzes hatten wir eine Reduktion  
 $PCP \mapsto G_4$  mit

$$PCP \text{ unlösbar} \Leftrightarrow L(G_4) = \Sigma^*.$$

Sei  $\Sigma = \{a_1, \dots, a_n\}$ .

Dann reduziert  $PCP \mapsto (G_4, (a_1 | \dots | a_n)^*)$   
das PCP auf das Problem  $L(G) = L(\alpha)$ , □

## 6. Komplexitätstheorie

- Was ist mit beschränkten Mitteln (Zeit&Platz) berechenbar?
- Wieviel Zeit&Platz braucht man, um ein bestimmtes Problem/Sprache zu entscheiden?
- **Komplexität eines Problems**, nicht eines Algorithmus.
- **Obere Schranken**: durch Angabe eines Algorithmus  
Bsp:  $w \in L(G)$  für CFGs ist in Zeit  $O(|w|^3)$  lösbar, mit CYK.
- **Untere Schranken**: schwierig ...  
Bsp: Palindrom-Test auf einer 1-Band TM braucht Zeit  $\Theta(n^2)$   
Nicht hier.

## Polynomielle und exponentielle Komplexität

Taktfrequenz: 1GHz

Zeit	Problemgröße $n$					
	10	20	30	40	50	60
$n$	.01 $\mu\text{s}$	.02 $\mu\text{s}$	.03 $\mu\text{s}$	.04 $\mu\text{s}$	.05 $\mu\text{s}$	.06 $\mu\text{s}$
$n^2$	.1 $\mu\text{s}$	.4 $\mu\text{s}$	.9 $\mu\text{s}$	1.6 $\mu\text{s}$	2.5 $\mu\text{s}$	3.6 $\mu\text{s}$
$n^5$	100 $\mu\text{s}$	.003 s	.02 s	.1 s	.3 s	.7 s
$2^n$	1 $\mu\text{s}$	.001 s	1 s	18 m	13 T	36 J
$3^n$	59 $\mu\text{s}$	3 s	2 T	385 J	$2 \cdot 10^7$ J	$10^{12}$ J

$\mu\text{s}$ =Mikrosek., s=Sek., m=Minute, T=Tag, J=Jahr

Problemgröße lösbar in fester Zeit: Speedup

Komplexität	$n$	$n^2$	$n^5$	$2^n$	$3^n$
1 MHz Prozessor	$N_1$	$N_2$	$N_3$	$N_4$	$N_5$
1 GHz Prozessor	1000 $N_1$	32 $N_2$	4 $N_3$	$N_4 + 10$	$N_5 + 6$

## Zwei zentrale Komplexitätsklassen:

**P** = die von einer DTM in polynomieller Zeit lösbaren Probleme  
= die „leichten“ Probleme (*feasible problems*)

**NP** = die von einer NTM in polynomieller Zeit lösbaren Probleme  
In exponentieller Zeit lösbar (s. Simulation NTM durch DTM)

Zentrale Frage:

¿  $P = NP$  ?

Ist wichtig

- weil viele *praktisch relevante* Such- und Optimierungsprobleme in NP liegen
- und alle schnell lösbar wären wenn  $P = NP$ .

## Überblick:

- 1 Die Komplexitätsklassen P und NP
- 2 NP-Vollständigkeit
- 3 SAT: Ein NP-vollständiges Problem
- 4 Weitere NP-vollständige Probleme

## 6.1 Die Komplexitätsklasse P

Berechnungsmodelle:

**DTM** = deterministische Mehrband-TM

**NTM** = nichtdeterministische Mehrband-TM

### Definition 6.1

$time_M(w)$  := Anzahl der Schritte bis die DTM  $M[w]$  hält  
 $\in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$

Sei  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  eine totale Funktion.

Die Klasse der in Zeit  $f(n)$  entscheidbaren Sprachen:

$TIME(f(n)) := \{A \subseteq \Sigma^* \mid \exists \text{DTM } M. A = L(M) \wedge$   
 $\forall w \in \Sigma^*. time_M(w) \leq f(|w|)\}$

Merke:

- $n$  ist implizit die Länge der Eingabe
- Die DTM entscheidet die Sprache  $A$  in  $\leq f(n)$  Schritten

Wir betrachten Polynome mit Koeffizienten  $a_k, \dots, a_0 \in \mathbb{N}$ :

$$p(n) = a_k n^k + \dots + a_1 n + a_0$$

## Definition 6.2

$$P := \bigcup_{p \text{ Polynom}} \text{TIME}(p(n))$$

Damit gilt auch

$$P = \bigcup_{k \geq 0} \text{TIME}(O(n^k))$$

wobei

$$\text{TIME}(O(f)) := \bigcup_{g \in O(f)} \text{TIME}(g)$$

## Beispiel 6.3

- $\{ww^R \mid w \in \Sigma^*\} \in \text{TIME}(O(n^2)) \subseteq P$
- $\{(G, w) \mid G \text{ ist CFG} \wedge w \in L(G)\} \in P$
- $\{(G, w) \mid G \text{ ist Graph} \wedge w \text{ ist Pfad in } G\} \in P$
- $\{\text{bin}(p) \mid p \text{ Primzahl}\} \in P$

Beweis durch Angabe eines Algorithmus mit Komplexität  $O(n^k)$ .

## Bemerkungen

- $O(n \log n) \subset O(n^2)$
- $n^{\log n}, 2^n \notin O(n^k)$  für alle  $k$
- Beweis  $A \notin P$  meist schwierig

- Warum P und nicht (zB)  $O(n^{17})$ ?

Um robust bzgl Maschinenmodell zu sein:

1-Band DTM braucht  $O(t^2)$  Schritte

um  $t$  Schritte einer  $k$ -Band DTM zu simulieren.

Fast alle bekannten „vernünftigen“ Maschinenmodelle lassen sich von einer DTM in polynomieller Zeit simulieren.

Offen: Quantencomputer

- Warum TM? Historisch.

Ebenfalls möglich: (zB) WHILE.

Aber zwei mögliche Kostenmodelle:

**Uniform**  $x_i := x_j + n$  kostet 1 Zeiteinheit.

**Logarithmisch**  $x_i := x_j + n$  kostet  $\log x_j$  Zeiteinheiten.

## 6.2 Die Komplexitätsklasse NP

In Worten:

- NP ist die Klasse der Sprachen, die von einer NTM in polynomieller Zeit akzeptiert werden.
- Dh: Eine Sprache  $A$  liegt in NP gdw es ein Polynom  $p(n)$  und eine NTM  $M$  gibt, so dass
  - 1  $L(M) = A$  und
  - 2 für alle  $w \in A$  kann  $M[w]$  in  $\leq p(|w|)$  Schritten akzeptieren, dh einen Endzustand erreichen.

## Definition 6.4

$$ntime_M(w) := \begin{cases} \text{minimale Anzahl der Schritte} & \text{falls } w \in L(M) \\ \text{bis NTM } M[w] \text{ akzeptiert} & \\ 0 & \text{falls } w \notin L(M) \end{cases}$$

Sei  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  eine totale Funktion.

$$NTIME(f(n)) := \{A \subseteq \Sigma^* \mid \exists \text{NTM } M. A = L(M) \wedge \\ \forall w \in \Sigma^*. ntime_M(w) \leq f(|w|)\}$$

$$NP := \bigcup_{p \text{ Polynom}} NTIME(p(n))$$

### Bemerkungen:

- $P \subseteq NP$
- Seit etwa 1970 ist offen ob  $P = NP$ .

## Bemerkungen zur Definition von NP:

### Akzeptierende NTM $M$

- braucht für  $w \notin L(M)$  nicht zu halten.
- kann für  $w \in L(M)$  auch beliebig lange Berechnungsfolgen haben.

Äquivalente Definition NP' von NP: Die NTM  $M[w]$  *muss* nach maximal  $p(|w|)$  Schritten halten.

NP'  $\subseteq$  NP: Klar.

NP  $\subseteq$  NP': Falls  $A \in$  NP mit Polynom  $p$  und NTM  $M$ , so kann man NTM  $M'$  konstruieren mit  $L(M') = A$ , so dass  $M'[w]$  immer innerhalb von polynomieller Zeit hält.

- 1 Eingabe  $w$
- 2 Schreibe  $p(|w|)$  auf ein getrenntes Band („timer“)
- 3 Simuliere  $M[w]$ , aber dekrementiere timer nach jedem Schritt.
- 4 Wird timer=0, ohne dass  $M$  gehalten hat, halte in einem nicht-Endzustand („timeout“)

## Beispiel 6.5

- Ein Euler-Kreis ist ein geschlossener Pfad in einem (ungerichteten) Graphen, der jede Kante genau einmal enthält.
- Ein Graph hat einen Euler-Kreis gdw er zusammenhängend ist, und jeder Knoten geraden Grad hat. Beide Eigenschaften sind in polynomieller Zeit von einer DTM überprüfbar.
- $\implies \{G \mid G \text{ hat Euler-Kreis}\} \in P$

## Beispiel 6.6

- Ein Hamilton-Kreis ist ein geschlossener Pfad in einem (ungerichteten) Graphen, der jeden Knoten genau einmal enthält.
- $\text{HAMILTON} := \{G \mid G \text{ hat Hamilton-Kreis}\} \in \text{NP}$  mit folgendem Algorithmus der Art „Rate und prüfe“:
  - ① Rate eine Permutation der Knoten des Graphen.
  - ② Prüfe, ob diese Permutation ein Hamilton-Kreis ist.Das Raten ist in polynomieller Zeit von einer NTM machbar.  
Das Prüfen ist in polynomieller Zeit von einer DTM machbar.

Vermutung:  $\text{HAMILTON} \notin \text{P}$  da man keinen substantiell besseren Algorithmus kennt, als alle Permutationen auszuprobieren.

Viele Probleme sind von der Art dass

- schwer ist, zu entscheiden, ob sie lösbar sind,
- leicht ist, zu entscheiden, ob eine Lösungsvorschlag eine Lösung ist.

### Definition 6.7

Sei  $M$  eine DTM mit  $L(M) \subseteq \{w\#c \mid w \in \Sigma^*, c \in \Delta^*\}$ .

- Falls  $w\#c \in L(M)$ , so heißt  $c$  **Zertifikat** für  $w$ .
- $M$  ist ein **polynomiell beschränkter Verifikator** für die Sprache  $\{w \in \Sigma^* \mid \exists c \in \Delta^*. w\#c \in L(M)\}$  falls es ein Polynom  $p$  gibt, so dass  $time_M(w\#c) \leq p(|w|)$ .

NB: In Zeit  $p(n)$  kann  $M$  maximal die ersten  $p(n)$  Zeichen von  $c$  lesen. Daher genügt für  $w$  ein Zertifikat der Länge  $\leq p(|w|)$ .

### Beispiel 6.8 (HAMILTON)

Zertifikat: Knotenpermutation. In polynomieller Zeit verifizierbar.

## Beispiel 6.9 (RUCKSACK)

**Gegeben:** Zahlen  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$  und  $c \in \mathbb{N}$ .

**Problem:** Gibt es  $R \subseteq \{1, \dots, n\}$  mit  $\sum_{i \in R} a_i = c$ ?

$$\text{RUCKSACK} := \{ \text{bin}(a_1) \# \dots \# \text{bin}(a_n) \# \text{bin}(c) \mid \\ \exists R \subseteq \{1, \dots, n\}. \sum_{i \in R} a_i = c \}$$

RUCKSACK  $\in$  NP:

Zertifikat: Indexmenge  $R$ . In polynomieller Zeit verifizierbar.

Merke: Der Nachweis  $A \in$  NP ist meistens einfach.

## Satz 6.10

$A \in NP$  gdw es gibt polynomiell beschränkten Verifikator für  $A$ .

### Beweis:

„ $\Rightarrow$ “:

Sei  $A \in NP$ . Dh es gibt NTM  $N$ , die  $A$  in Zeit  $p(n)$  akzeptiert. Ein Zertifikat für  $w \in A$  ist die Folge der benutzten Transitionen  $\delta(q, a) \ni (q', a', d)$  einer akzeptierenden Berechnungsfolge von  $N[w]$  mit  $\leq p(n)$  Schritten.

Ein polynomiell beschränkter Verifikator für  $L(N)$ :

- 1 Eingabe  $w\#c$
- 2 Simuliere  $N[w]$ , gesteuert durch die Transitionen in  $c$ .
- 3 Überprüfe dabei, ob die Transition in  $c$  jeweils zu  $N$  und zur augenblicklichen Konfiguration von  $N$  passt.
- 4 Akzeptiere, falls  $c$  in einen Endzustand führt.

## Beweis (Forts.):

„ $\Leftarrow$ “:

Sei  $M$  ein polynomiell (durch  $p$ ) beschränkter Verifikator für  $A$ .

Wir bauen eine polynomiell beschränkte NTM  $N$  mit  $L(M) = A$ :

- 1 Eingabe  $w$ .
- 2 Schreibe hinter  $w$  zuerst  $\#$  und dann ein nichtdeterministisch gewähltes Wort  $c \in \Delta^*$ ,  $|c| = p(|w|)$ :  
**for**  $i := 1, \dots, p(|w|)$  **do**  
    schreibe ein Zeichen aus  $\Delta$  und gehe nach rechts
- 3 Führe  $M$  aus (mit Eingabe  $w\#c$ ).

Nach Annahme gilt  $\text{time}_M(w\#c) \leq p(|w|)$ .

Damit braucht  $N[w]$   $O(p(|w|))$  Schritte. □

## Fazit:

**P** sind die Sprachen, bei denen  $w \in L$  schnell **entschieden** werden kann.

**NP** sind die Sprachen, bei denen ein Zertifikat für  $w \in L$  schnell **verifiziert/überprüft** werden kann.

Intuition:

Es ist leichter, eine Lösung zu verifizieren als zu finden.

Aber:

Noch wurde von keiner Sprache bewiesen, dass sie in  $NP \setminus P$  liegt.

## 6.3 NP-Vollständigkeit

- 1 Polynomielle Reduzierbarkeit  $\leq_p$
- 2 NP-vollständige Probleme = härteste Probleme in NP, alle anderen Probleme in NP darauf polynomiell reduzierbar
- 3 Satz: SAT ist NP-vollständig

### Definition 6.11

Sei  $A \subseteq \Sigma^*$  und  $B \subseteq \Gamma^*$ .

Dann heißt  $A$  **polynomiell reduzierbar** auf  $B$ ,  $A \leq_p B$ ,  
gdw es eine totale und von einer DTM in polynomieller Zeit  
berechenbare Funktion  $f : \Sigma^* \rightarrow \Gamma^*$  gibt, so dass für alle  $w \in \Sigma^*$

$$w \in A \iff f(w) \in B$$

Da  $q(p(n))$  ein Polynom ist falls  $p$  und  $q$  Polynome sind:

### Lemma 6.12

*Die Relation  $\leq_p$  ist transitiv.*

## Lemma 6.13

Die Klassen  $P$  und  $NP$  sind unter polynomieller Reduzierbarkeit nach unten abgeschlossen:

$$A \leq_p B \in P/NP \implies A \in P/NP$$

Beweis:

- Sei  $A \leq_p B$  mittels  $f$ , die von DTM  $M_f$  berechnet wird. Polynom  $p$  begrenzt Rechenzeit von  $M_f$ .
- Sei  $B \in P$  mittels DTM  $M$ . Polynom  $q$  begrenzt Rechenzeit von  $M$ .

Damit ist  $M_f; M$  polynomiell zeitbeschränkt in  $|w|$ :

- $M_f[w]$  macht  $\leq p(|w|)$  Schritte.
- Ausgabe  $f(w)$  von  $M_f$  hat Länge  $\leq |w| + p(|w|)$ .
- $M$  macht  $\leq q(|f(w)|) \leq q(|w| + p(|w|))$  Schritte ( $q$  monoton)

Daher macht  $(M_f; M)[w]$  maximal  $p(|w|) + q(|w| + p(|w|))$  Schritte, ein Polynom in  $|w|$ .

Analog:  $A \leq_p B \in NP \implies A \in NP$



Ein Problem ist **NP-hart**,  
wenn es mindestens so hart wie alles in NP ist:

### Definition 6.14

Eine Sprache  $L$  heißt **NP-hart** gdw  $A \leq_p L$  für alle  $A \in \text{NP}$ .

### Definition 6.15

Eine Sprache  $L$  heißt **NP-vollständig** gdw  
 $L$  NP-hart ist und  $L \in \text{NP}$ .

NP-vollständige Probleme sind die “schwierigsten” Probleme in NP:

alle Probleme in NP sind polynomiell auf sie reduzierbar.

# NP-hart

NP-vollständig

NP

P

Wie man  $P \stackrel{?}{=} NP$  lösen kann:

### Lemma 6.16

*Es gilt  $P=NP$  gdw ein NP-vollständiges Problem in  $P$  liegt.*

### Beweis:

„ $\Rightarrow$ “: Falls  $P=NP$ , so liegt jedes NP-vollständige Problem in  $P$ .

„ $\Leftarrow$ “: Sei  $L$  ein NP-vollständiges Problem in  $P$ .

Dann gilt  $P \supseteq NP$ :

Ist  $A \in NP$ , so gilt  $A \leq_p L$  (da  $L$  NP-hart)  
und nach Lemma 6.13  $A \in P$  (da  $L \in P$ ).



Starke Vermutung:

- $P \neq NP$
- dh kein NP-vollständiges Problem ist in  $P$ .

Aber gibt es überhaupt NP-vollständige Probleme?

## Aussagenlogik

Syntax der Aussagenlogik:

Formeln:  $F \rightarrow \neg F \mid (F \wedge F) \mid (F \vee F) \mid X$

Variablen:  $X \rightarrow x \mid y \mid z \mid \dots$

Bsp:  $((\neg x \wedge y) \vee (x \wedge \neg z))$

Semantik der Aussagenlogik:

- Eine **Belegung** ist eine Funktion von Variablen auf  $\{0, 1\}$ .  
Bsp:  $\sigma = \{x \mapsto 0, y \mapsto 1, z \mapsto 0, \dots\}$
- Belegungen werden mittels Wahrheitstabellen auf Formeln erweitert. Bsp:  $\sigma((\neg x \wedge y) \vee (x \wedge \neg z)) = 1$
- Eine Formel  $F$  ist **erfüllbar** gdw es eine Belegung  $\sigma$  gibt mit  $\sigma(F) = 1$

## SAT

**Gegeben:** Eine aussagenlogische Formel  $F$ .

**Problem:** Ist  $F$  erfüllbar?

Praktische Bedeutung von SAT:

Äquivalenztest von Schaltungen (und vieles mehr)

### Fakt 6.17

Zwei Formeln  $F_1$  und  $F_2$  sind genau dann äquivalent ( $F_1 \leftrightarrow F_2$ ), wenn  $(F_1 \wedge \neg F_2) \vee (\neg F_1 \wedge F_2)$  nicht erfüllbar ist.

### Lemma 6.18

$SAT \in NP$

### Beweis:

Belegungen sind Zertifikate, die in polynomieller Zeit geprüft werden können: Es gibt eine DTM, die bei Eingabe einer Formel  $F$  und einer Belegung  $\sigma$  für die Variablen in  $F$ , in polynomieller Zeit  $\sigma(F)$  berechnet. □

## Satz 6.19 (Cook 1971)

SAT ist NP-vollständig.

### Beweis:

Da  $SAT \in NP$ , bleibt noch zu zeigen, SAT ist NP-hart.

Sei  $A \in NP$ . Wir zeigen  $A \leq_p SAT$ .

Da  $A \in NP$  gibt es NTM  $M$  mit  $A = L(M)$  und

Polynom  $p$  mit  $ntime_M(w) \leq p(|w|)$ .

Reduktion bildet  $w = x_1 \dots x_n \in \Sigma^*$  auf eine Formel  $F$  ab.

In polynomieller Zeit. So dass  $w \in L(M) \Leftrightarrow F \in SAT$ .

Die Variablen beschreiben das mögliche Verhalten von  $M[w]$ :

$zust_{t,q}$	$t = 0, \dots, p(n)$ $q \in Q$	$zust_{t,q} = 1 \Leftrightarrow$ Zustand nach $t$ Schritten ist $q$
$pos_{t,i}$	$t = 0, \dots, p(n)$ $i = -p(n), \dots, p(n)$	$pos_{t,i} = 1 \Leftrightarrow$ Kopfposition nach $t$ Schritten ist $i$
$band_{t,i,a}$	$t = 0, \dots, p(n)$ $i = -p(n), \dots, p(n)$ $a \in \Gamma$	$band_{t,i,a} = 1 \Leftrightarrow$ Bandinhalt nach $t$ Schritten auf Bandposition $i$ ist Zeichen $a$

## Beweis (Forts.):

Sei  $Q = \{q_1, \dots, q_k\}$  und  $\Gamma = \{a_1, \dots, a_l\}$ .

$$F := R \wedge A \wedge T_1 \wedge T_2 \wedge E$$

$$R := \bigwedge_t [G(\text{zust}_{t,q_1}, \dots, \text{zust}_{t,q_k}) \wedge G(\text{pos}_{t,-p(n)}, \dots, \text{pos}_{t,p(n)}) \wedge \bigwedge_i G(\text{band}_{t,i,a_1}, \dots, \text{band}_{t,i,a_l})] \quad (G = \text{Genau1})$$

$$A := \text{zust}_{0,q_1} \wedge \text{pos}_{0,1} \wedge \bigwedge_{j=1}^n \text{band}_{0,j,x_j} \wedge \bigwedge_{j=-p(n)}^0 \text{band}_{0,j,\square} \wedge \bigwedge_{j=n+1}^{p(n)} \text{band}_{0,j,\square}$$

## Beweis (Forts.):

$$T_1 := \bigwedge_{t,q,i,a} [zust_{t,q} \wedge pos_{t,i} \wedge band_{t,i,a} \\ \rightarrow \bigvee_{(q',a',y) \in \delta(q,a)} (zust_{t+1,q'} \wedge pos_{t+1,i+y} \wedge band_{t+1,i,a'})]$$

$$T_2 := \bigwedge_{t,i,a} ((\neg pos_{t,i} \wedge band_{t,i,a}) \rightarrow band_{t+1,i,a})$$

$$E := \bigvee_t \bigvee_{q \in F} zust_{t,q}$$

$$G(v_1, \dots, v_r) := \left( \bigvee_{i=1}^r v_i \right) \wedge \left( \bigwedge_{i=1}^{r-1} \bigwedge_{j=i+1}^r \neg(v_i \wedge v_j) \right)$$



## Von der Lösbarkeit zur Lösung

Wenn man SAT lösen kann, dann kostet es nicht viel mehr, dazu eine erfüllenden Belegung zu berechnen:

Sei  $F$  eine Formel mit den Variablen  $x_1, \dots, x_k$ :

**if**  $F \notin \text{SAT}$  **then** output(“nicht lösbar”)

**else**

**for**  $i := 1$  **to**  $k$  **do**

**if**  $F[x_i := 0] \in \text{SAT}$  **then**  $b := 0$  **else**  $b := 1$

    output( $x_i$  “=”  $b$ )

$F := F[x_i := b]$

wobei  $F[x := b] = F$  mit  $x$  ersetzt durch  $b$ .

Entscheidung von SAT in Zeit  $O(f(n))$

$\implies$  Berechnung einer erf. Bel. in Zeit  $O(n \cdot (f(n) + n))$

(falls es eine gibt.)

$f(n)$  polynomiell  $\implies n \cdot (f(n) + n)$  polynomiell

$f(n)$  exponentiell  $\implies n \cdot (f(n) + n)$  exponentiell

## **Bemerkungen:**

- Die Reduzierung der Lösungsberechnung auf SAT ist eine rein theoretische Konstruktion.
- Sie zeigt, dass man sich auf SAT beschränken kann, wenn man nur an polynomiell/exponentiell interessiert ist.
- Alle bekannten Entscheidungsverfahren für SAT berechnen auch eine Lösung.

## Von NP-hart zu „NP-leicht“

- Vor dem Jahr 2000:

NP-vollständig = Todesurteil

- In den letzten Jahren:

Spektakuläre Fortschritte bei *Implementierung* von SAT-Lösern (*SAT-solver*): <http://satcompetition.org>  
Stand der Kunst:

Erfüllbar: bis  $10^5$  Variablen Unerfüllbar: bis  $10^3$  Variablen

- Jetzt:

NP-vollständig = Hoffnung durch SAT

- Paradigma:

SAT (Logik!) als universelle Sprache  
zur Kodierung kombinatorischer Probleme

Reduktion auf SAT manchmal schneller als problemspezifische Löser! Und fast immer einfacher.

Beispiel: Reduktion von 3-Färbbarkeit (3COL) auf SAT.

## 3COL

**Gegeben:** Ein ungerichteter Graph

**Problem:** Gibt es eine Färbung der Knoten mit 3 Farben, so dass keine benachbarten Knoten gleich gefärbt sind?

Lineare Reduktion von Graph  $G = (V, E)$  auf SAT:

- Variablen =  $V \times \{1, 2, 3\}$ . Notation:  $x_{vi}$
- Interpretation:  $x_{vi} = 1$  gdw Knoten  $v$  hat Farbe  $i$

Instanz von SAT:

$$\bigwedge_{v \in V} \text{Genau1}(x_{v1}, x_{v2}, x_{v3}) \wedge \bigwedge_{(u,v) \in E} \neg(x_{u1} \wedge x_{v1} \vee x_{u2} \wedge x_{v2} \vee x_{u3} \wedge x_{v3})$$

## Bemerkungen

- Zeigt  $3\text{COL} \leq_p \text{SAT}$  und damit  $3\text{COL} \in \text{NP}$ .
- Zeigt nicht, dass 3COL NP-vollständig ist.

Ähnlich direkt polynomiell auf SAT reduzierbar:

- HAMILTON
- SUDOKU
- ...

Eine Anwendung von  $k$ -Färbbarkeit: **Registerverteilung**

*Kann man in einem Programmstück  $n$  Variablen so auf  $k$  Register verteilen, dass jede Variable so lange in einem Register bleibt, wie sie **lebendig** ist?*

Variable ist an einem Punkt **lebendig**

gdw sie später noch gelesen wird, ohne vorher überschrieben worden zu sein.

Reduktion auf  $k$ -Färbbarkeit:

Variable = Knoten

$u$  und  $v$  verbunden =  $u \neq v$  und es gibt einen Programmpunkt, an dem  $u$  und  $v$  lebendig sind

Farbe = Register

$k$ -Färbung = Zuordnung eines Registers zu jeder Variablen

Sowohl  $k$ -Färbbarkeit als auch Registerverteilung ist für  $k \geq 3$  NP-vollständig.

Mehr Information: Vorlesung *Programmoptimierung*

Weitere Anwendungen von SAT:

*Bounded Model Checking*

**Hardware** Entscheide, ob eine Schaltung mit Zustand für **alle** Eingaben innerhalb von 10 Zyklen ein bestimmtes Verhalten (nicht) hat.

**Software** Entscheide, ob ein Programm für **alle** Eingaben innerhalb von 10 Schritten ein bestimmtes Verhalten (nicht) hat.  
**Variablen müssen auf kleine Wertebereiche eingeschränkt werden!**

## 6.4 Weitere NP-vollständige Probleme

Wie zeigt man, dass ein (weiteres) Problem  $B$  NP-vollständig ist?

- Zeige  $B \in \text{NP}$  (meist trivial)
- Zeige  $A \leq_p B$  für ein NP-vollständiges Problem  $A$ .

### Lemma 6.20

*Ist  $A$  NP-vollständig, so ist  $B \in \text{NP}$  ebenfalls NP-vollständig, falls  $A \leq_p B$ .*

### Beweis:

Folgt direkt aus der Transitivität von  $\leq_p$ :

$B$  ist NP-hart, denn für  $C \in \text{NP}$  gilt  $C \leq_p A \leq_p B$ . □

Warum will man wissen, dass ein Problem  $B$  NP-vollständig ist?

Um sicher zu sein, dass

- ein polynomieller Algorithmus für  $B$  ein Durchbruch wäre
- und daher wahrscheinlich nicht existiert.

Praktische Instanzen von  $B$  könnten trotzdem (zB mit SAT)  
„effizient“ lösbar sein.

## Definition 6.21

- Eine Formel ist in **Konjunktiver Normalform (KNF)** gdw sie eine Konjunktion von **Klauseln** ist:  $K_1 \wedge \cdots \wedge K_n$
- Eine **Klausel** ist eine Disjunktion von **Literalen**:  $L_1 \vee \cdots \vee L_m$
- Ein **Literal** ist eine (evtl. negierte) Variable.
- Eine Formel ist in **3KNF** gdw jede Klausel  $\leq 3$  Literale enthält.

Dh eine KNF ist ein Konjunktion von Disjunktionen von (evtl negierten) Variablen.

Bsp:  $(x_9 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_7 \vee x_1 \vee x_6)$

## 3KNF-SAT

**Gegeben:** Ein Formel in 3KNF

**Problem:** Ist die Formel erfüllbar?

Offensichtlich gilt  $3KNF-SAT \in NP$ .

Aber vielleicht ist 3KNF-SAT einfacher als SAT?

## Satz 6.22

3KNF-SAT ist NP-vollständig.

### Beweis:

Wir zeigen  $\text{SAT} \leq_p \text{3KNF-SAT}$ . Wir geben eine polynomielle Reduktion  $F \mapsto F'$  an, so dass  $F'$  in 3KNF ist und

$$F \text{ ist erfüllbar} \Leftrightarrow F' \text{ ist erfüllbar}$$

NB  $F$  und  $F'$  sind **erfüllbarkeitsäquivalent**, aber nicht notwendigerweise auch äquivalent.

1. Transformiere  $F$  in **Negationsnormalform (NNF)** durch fortgesetzte Anwendung der de Morganschen Gesetze

$$\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$$

$$\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$$

$$\neg\neg A = A$$

von links nach rechts.  $F_1$  ist Resultat.

## Beweis (Forts.):

Für  $F_1$  gilt:  $\neg$  nur noch direkt vor Variablen.

2. Betrachte  $F_1$  als Baum, wobei die Literale Blätter sind.  
Ordne jedem inneren Knoten eine neue Variable  $\in \{y_0, y_1, \dots\}$  zu.  
Ordne dabei der Wurzel von  $F_1$  die Variable  $y_0$  zu.

3. Betrachte die  $y_i$  als Abkürzung für die Teilbäume, an deren Wurzeln sie stehen

$$y_i = \begin{array}{c} \circ_i \\ / \quad \backslash \\ l_i \quad r_i \end{array}$$

wobei  $\circ_i \in \{\wedge, \vee\}$  und  $l_i, r_i$  ein Literal oder eine Variable  $y_j$  ist.  
Beschreibe  $F_1$  Knoten für Knoten:

$$y_0 \wedge (y_0 \leftrightarrow (l_0 \circ_0 r_0)) \wedge (y_1 \leftrightarrow (l_1 \circ_1 r_1)) \dots =: F_2$$

## Beweis (Forts.):

$F_1$  erf.  $\implies F_2$  erf.:  $y_i$  bekommt Wert seines Teilbaums.

$F_2$  erf.  $\implies F_1$  erf.: klar

4. Transformiere jede Äquivalenz in 3KNF:

$$(a \leftrightarrow (b \vee c)) \mapsto (a \vee \neg b) \wedge (a \vee \neg c) \wedge (\neg a \vee b \vee c)$$

$$(a \leftrightarrow (b \wedge c)) \mapsto (\neg a \vee b) \wedge (\neg a \vee c) \wedge (a \vee \neg b \vee \neg c)$$

Ergebnis ist  $F'$ .

Jeder Schritt ist in polynomieller Zeit in  $|F|$  berechenbar.

Bei Transformation in NNF nimmt mit jedem Schritt

Summe der  $|G|$  für alle Teilformeln  $\neg G$  von  $F$

ab.

Daher erreicht man die NNF in  $\leq |F|^2$  Schritten.



Da jede Formel in 3KNF auch in KNF ist:

### Korollar 6.23

*KNF-SAT ist NP-vollständig.*

Kann man wie folgt die NP-Vollständigkeit von KNF-SAT zeigen?

Man zeigt  $SAT \leq_p KNF-SAT$   
indem man jede Formel in KNF transformiert.

### Satz 6.24

*2KNF-SAT  $\in P$*

Ohne Beweis

## MENGENÜBERDECKUNG (MÜ)

**Gegeben:** Teilmengen  $T_1, \dots, T_n \subseteq M$  einer endlichen Menge  $M$  und eine Zahl  $k \leq n$ .

**Problem:** Gibt es  $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$  mit  $M = T_{i_1} \cup \dots \cup T_{i_k}$ ?

### Beispiel 6.25

$$\begin{array}{ll} T_1 = \{1, 2\} & T_2 = \{1, 3\} \\ T_3 = \{3, 4\} & T_4 = \{3, 5\} \\ M = \{1, 2, 3, 4, 5\} & k = 3 \end{array}$$

Lösung: Ja

Anwendung: Zulieferer

$M$  Menge der Teile, die eine Firma einkaufen muss

$T_i$  Menge der Teile, die Zulieferer  $i$  anbietet

Kann die Firma ihre Bedürfnisse mit  $k$  Zulieferern abdecken?

### Fakt 6.26

$MÜ \in NP$ .

## Satz 6.27

*MÜ ist NP-vollständig.*

### Beweis:

Wir zeigen  $\text{KNF-SAT} \leq_p \text{MÜ}$ .

Sei  $F = K_1 \wedge \cdots \wedge K_m$  in KNF, mit Variablen  $x_1, \dots, x_k$ .

$$M := \{1, \dots, m, m+1, \dots, m+k\}$$

$$T_i := \{j \mid x_i \text{ kommt in } K_j \text{ positiv vor}\} \cup \{m+i\}$$

$$T'_i := \{j \mid x_i \text{ kommt in } K_j \text{ negativ vor}\} \cup \{m+i\}$$

$F$  ist erfüllbar

gdw

$M$  wird durch  $k$  der Teilmengen  $T_1, \dots, T_k, T'_1, \dots, T'_k$  überdeckt



## Beweis (Forts.):

Sei  $F = K_1 \wedge \dots \wedge K_m$  in KNF, mit Variablen  $x_1, \dots, x_l$ .

$$M := \{1, \dots, m\} \cup \{m+1, \dots, m+l\}$$

$$T_i := \{j \mid x_i \text{ kommt in } K_j \text{ positiv vor}\} \cup \{m+i\}$$

$$T'_i := \{j \mid x_i \text{ kommt in } K_j \text{ negativ vor}\} \cup \{m+i\}$$

Beispiel:  $(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_4)$

$\implies$

$$T_1 = \{1, 2+1\} \quad T'_1 = \{2, 2+1\}$$

$$T_2 = \{1, 2, 2+2\} \quad T'_2 = \{2+2\}$$

$$T_3 = \{1, 2+3\} \quad T'_3 = \{2+3\}$$

$$T_4 = \{2, 2+4\} \quad T'_4 = \{2+4\}$$

Überdeckung:  $T'_1, T_2, T'_3, T'_4 \approx x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 0$

## Beweis (Forts.):

Sei  $F = K_1 \wedge \dots \wedge K_m$  in KNF, mit Variablen  $x_1, \dots, x_l$ .

$$M := \{1, \dots, m\} \cup \{m+1, \dots, m+l\}$$

$$T_i := \{j \mid x_i \text{ kommt in } K_j \text{ positiv vor}\} \cup \{m+i\}$$

$$T'_i := \{j \mid x_i \text{ kommt in } K_j \text{ negativ vor}\} \cup \{m+i\}$$

„ $\Leftarrow$ “ Sei  $U_1, \dots, U_n \in \{T_1, \dots, T'_n\}$  eine Überdeckung von  $M$ .

$\Rightarrow$  Es gibt für alle  $1 \leq i \leq n$  genau eine Menge  $U_i \in \{T_i, T'_i\}$  mit  $m+i \in U_i$ .

Setze  $\sigma(x_i) :=$  if  $U_i = T_i$  then 1 else 0

$\Rightarrow \sigma(K_j) = 1$  für alle  $1 \leq j \leq m$

$\Rightarrow \sigma(F) = 1$



## Das Minimierungsproblem

**Gegeben:** Teilmengen  $T_1, \dots, T_n \subseteq M$  einer endlichen Menge  $M$

**Problem:** Finde das kleinste  $k$ , so dass  $M$  von  $k$  der Teilmengen überdeckt wird.

kann auf das Entscheidungsproblem reduziert werden:

Finde kleinstes  $k$  durch binäre Suche im Intervall  $[1, n]$   
mit  $O(\log n)$  Aufrufen von MÜ.

Kann man MÜ in Zeit  $O(f(n))$  entscheiden,  
dann kann man das kleinste  $k$  in Zeit  $O(f(n) \cdot \log n)$  berechnen.

$$\begin{aligned} f(n) \text{ polynomiell} &\implies f(n) \cdot \log n \text{ polynomiell} \\ f(n) \text{ exponentiell} &\implies f(n) \cdot \log n \text{ exponentiell} \end{aligned}$$

Die Berechnung einer **Lösung**

**Gegeben:** Teilmengen  $\vec{T} := T_1, \dots, T_n \subseteq M$  einer endlichen Menge  $M$ , und eine Zahl  $k \leq n$ .

**Problem:** Finde eine Überdeckung von  $M$  durch  $k$  der Teilmengen.

kann auf das Entscheidungsproblem reduziert werden:

**if**  $(\vec{T}, M, k) \notin \text{MÜ}$  **then** output(“nicht lösbar”)

**else**

$\ddot{U} := \emptyset$

**for**  $i := 1$  **to**  $n$  **do**

**if**  $(\vec{T} - T_i, M, k) \in \text{MÜ}$

**then**  $\vec{T} := \vec{T} - T_i$

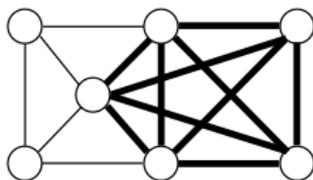
**else**  $\ddot{U} := \ddot{U} \cup \{T_i\}$

## CLIQUE

**Gegeben:** Ungerichteter Graph  $G = (V, E)$  und Zahl  $k \in \mathbb{N}$ .

**Problem:** Besitzt  $G$  eine „Clique“ der Größe mindestens  $k$ ?  
Dh eine Teilmenge  $V' \subseteq V$  mit  $|V'| \geq k$   
und alle  $u, v \in V'$  mit  $u \neq v$  sind benachbart.

Beispiel mit 5-Clique:



Anwendung von Clique-Berechnung:

Knoten = Prozess

Kante = Zwei Prozesse sind parallel ausführbar

⇒ Clique ist Gruppe von parallelisierbaren Prozessen

**Fakt 6.28**

$CLIQUE \in NP$

## Satz 6.29

CLIQUE ist NP-vollständig.

**Beweis:** 3KNF-SAT  $\leq_p$  CLIQUE:

Eine Formel  $F$  in 3KNF-SAT (oE: *genau* 3 Literale/Klausel)

$$F = (z_{11} \vee z_{12} \vee z_{13}) \wedge \dots \wedge (z_{k1} \vee z_{k2} \vee z_{k3})$$

wird auf einen Graphen abgebildet:

$$V = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), \dots, (k, 1), (k, 2), (k, 3)\}$$

$$E = \{\{(i, j), (p, q)\} \mid i \neq p \text{ und } z_{ij} \neq \neg z_{pq}\}$$

$F$  ist erfüllbar durch eine Belegung  $\sigma \iff$

Es gibt in jeder Klausel  $i$  ein Literal  $z_{ij_i}$  mit  $\sigma(z_{ij_i}) = 1$

$\iff$

Die Literale  $z_{1j_1}, \dots, z_{kj_k}$  sind paarweise nicht komplementär

$\iff$

Die Knoten  $(1, j_1), \dots, (k, j_k)$  sind paarweise benachbart

$\iff G$  hat eine Clique der Größe  $k$ .



## RUCKSACK

**Gegeben:** Zahlen  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$  und  $b \in \mathbb{N}$ .

**Problem:** Gibt es  $R \subseteq \{1, \dots, n\}$  mit  $\sum_{i \in R} a_i = b$  ?

### Satz 6.30

*RUCKSACK ist NP-vollständig.*

**Beweis:** 3KNF-SAT  $\leq_p$  RUCKSACK:

Sei  $F = (z_{11} \vee z_{12} \vee z_{13}) \wedge \dots \wedge (z_{m1} \vee z_{m2} \vee z_{m3})$ , wobei

$$z_{ij} \in \{x_1, \dots, x_n\} \cup \{\neg x_1, \neg x_2, \dots, \neg x_n\}$$

D.h.  $m$  = Anzahl der Klauseln und  $n$  Anzahl der Variablen.

## Beweis (Forts.):

Wir geben Zahlen  $v_{i0}, v_{i1}$  für jede variable  $x_i$ , Zahlen  $k_{j1}, k_{j2}$  für jede Klausel  $K_j$ , und eine Zahl  $b$  an.

- Alle Zahlen haben genau  $m + n$  Stellen im Dezimalsystem. Die  $j$ -te Stelle,  $1 \leq j \leq m$ , nennen wir "Stelle (der Klausel)  $K_j$ ". Die  $m + i$  Stelle,  $1 \leq i \leq n$ , nennen wir "Stelle (der Variable)  $x_i$ ".
- $b = \underbrace{44 \dots 44}_m \underbrace{11 \dots 11}_n$
- An der Stelle  $x_i$  haben  $v_{i0}, v_{i1}$  eine 1, und die Zahlen und  $k_{j1}, k_{j2}$  eine 0.
  - genau eine von  $v_{i0}, v_{i1}$  muss in den Rucksack
  - modelliert die Wahl einer Belegung.

## Beweis (Forts.):

Beschreibung der Zahlen  $v_{i0}, v_{i1}, k_{j1}, k_{j2}$ :

- $v_{i0}$  hat eine 1 an der Stelle  $x_i$  sowie an den Stellen der Klauseln, die  $\neg x_i$  enthalten, sonst 0en.
- $v_{i1}$  hat eine 1 an der Stelle  $x_i$  sowie an den Stellen der Klauseln, die  $x_i$  enthalten, sonst 0en.
- $k_{j1}$  hat eine 1 an der Stelle  $K_j$ , sonst 0en.
- $k_{j2}$  hat eine 2 an der Stelle  $K_j$ , sonst 0en.

Wenn die Summe einer Untermenge  $R$  die Zahl  $b$  ergibt, dann erfüllt die Belegung  $\sigma$  mit  $\sigma(x_i) = 1$  gdw  $v_{i1} \in R$  die Formel  $F$ .

Wenn  $F$  erfüllbar ist, dann wähle  $R$  so:

- Nehme eine erfüllende Belegung  $\sigma$  von  $F$ .
- Für jede Variable  $x_i$ : Füge  $v_{i1}$  zu  $R$  wenn  $\sigma(x_i) = 1$ , sonst füge  $v_{i0}$ .
- Für jede Klausel  $K_j$ : Füge  $k_{j1}$  oder  $k_{j2}$  hinzu, um eine 4 an der Stelle  $K_j$  zu gewinnen.

## PARTITION

Gegeben: Zahlen  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$ .

Problem: Gibt es  $I \subseteq \{1, \dots, n\}$  mit  $\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i \notin I} a_i$  ?

### Satz 6.31

*PARTITION ist NP-vollständig.*

Beweis: RUCKSACK  $\leq_p$  PARTITION

Beispiel:  $\vec{a} = 12, 7, 4, 9, 7, 3, 15$  und  $b = 38$ .

Lösung: Die Zahlen 7, 9, 7, 15, dh  $R = \{2, 4, 5, 7\}$

RUCKSACK  $\rightarrow$  PARTITION:

$$M := \sum_{i=1}^n a_i = 57, \quad M - b + 1 = 20, \quad b + 1 = 39$$

Das resultierende PARTITION-Problem: 12, 7, 4, 9, 7, 3, 15, 20, 39

Lösung:  $\{7, 9, 7, 15, 20\}$  und  $\{12, 4, 3, 39\}$ , dh  $I = \{2, 4, 5, 7, 8\}$ .

Reduktion im Allgemeinen:

$$a_1, a_2, \dots, a_k, b \mapsto a_1, a_2, \dots, a_k, M - b + 1, b + 1 \quad \square$$

## BIN PACKING

**Gegeben:** Eine „Behältergröße“  $b \in \mathbb{N}$ , die Anzahl der Behälter  $k \in \mathbb{N}$  und „Objekte“  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .

**Problem:** Können die Objekte so auf die  $k$  Behälter verteilt werden, dass kein Behälter überläuft?

### Satz 6.32

*BIN PACKING ist NP-vollständig.*

**Beweis:** PARTITION  $\leq_p$  BIN PACKING

$$(a_1, \dots, a_n) \mapsto (b, k, 2a_1, \dots, 2a_n)$$

wobei  $b := \sum_{i=1}^n a_i$  und  $k := 2$ . □

## HAMILTON

**Gegeben:** Ungerichteter Graph  $G$

**Problem:** Enthält  $G$  einen Hamilton-Kreis, dh einen geschlossenen Pfad, der jeden Knoten genau einmal enthält?

### Satz 6.33

*HAMILTON ist NP-vollständig.*

## TRAVELLING SALESMAN (TSP)

**Gegeben:** Eine  $n \times n$  Matrix  $M_{ij} \in \mathbb{N}$  von „Entfernungen“  
und eine Zahl  $k \in \mathbb{N}$

**Problem:** Gibt es eine „Rundreise“ (Hamilton-Kreis) der Länge  
 $\leq k$ ?

### Satz 6.34

*TSP ist NP-vollständig.*

**Beweis:** HAMILTON  $\leq_p$  TSP

$$(\{1, \dots, n\}, E) \mapsto (M, n)$$

wobei

$$M_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{falls } \{i, j\} \in E \\ 2 & \text{sonst} \end{cases}$$



## FÄRBBARKEIT (COL)

**Gegeben:** Ein ungerichteter Graph  $(V, E)$  und eine Zahl  $k$ .

**Problem:** Gibt es eine Färbung der Knoten  $V$  mit  $k$  Farben, so dass keine zwei benachbarten Knoten die gleiche Farbe haben?

### Satz 6.35

*FÄRBBARKEIT ist NP-vollständig für  $k \geq 3$ .*

**Beweis:**

$3\text{KNF-SAT} \leq_p 3\text{FÄRBBARKEIT}$



### Satz 6.36

$2\text{FÄRBBARKEIT} \in P$

Die NP-Bibel, der NP-Klassiker:



[Michael Garey and David Johnson.](#)

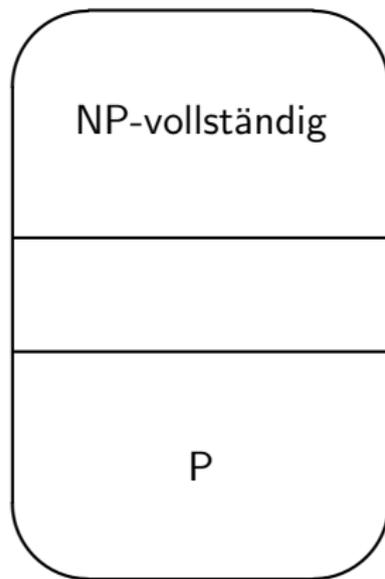
*Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness.* 1979.

*Despite the 23 years that have passed since its publication, I consider Garey and Johnson the single most important book on my office bookshelf.*

Lance Fortnow, 2002.

Man weiß nicht ob  $P = NP$ . Aber man weiß (Ladner 1975)

$P \neq NP \implies NP =$





## Kurt Gödel.

*Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I.* Monatshefte für Mathematik, 1931.

### **Kurt Gödel**

1906 (Brünn) –  
1978 (Princeton)



## 6.5 Die Unvollständigkeit der Arithmetik

Syntax der Arithmetik:

Variablen:	$V$	$x y z \dots$
Zahlen:	$N$	$0 1 2 \dots$
Terme:	$T$	$V N (T + T) (T * T)$
Formeln:	$F$	$(T = T) \neg F (F \wedge F) (F \vee F)$ $\exists V. F$

Wir betrachten  $\forall x. F$  als Abk. für  $\neg \exists x. \neg F$ .

### Definition 6.37

Ein Vorkommen einer Variablen  $x$  in einer Formel  $F$  ist **gebunden** gdw das Vorkommen in einer Teilformel der Form  $\exists x. F'$  oder  $\forall x. F'$  in der Teilformel  $F'$  liegt.

Ein Vorkommen ist **frei** gdw es nicht gebunden ist.

Notation:  $F(x_1, \dots, x_k)$  bezeichnet eine Formel  $F$ , in der höchstens  $x_1, \dots, x_k$  frei vorkommen.

Sind  $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$  so ist  $F(n_1, \dots, n_k)$  das Ergebnis der Substitution von  $n_1, \dots, n_k$  für die freien Vorkommen von  $x_1, \dots, x_k$ .

### Beispiel 6.38

$$F(x, y) = (x = y \wedge \exists x. x = y)$$

$$F(5, 7) = (5 = 7 \wedge \exists x. x = 7)$$

Ein **Satz** ist eine Formel ohne freie Variablen.

### Beispiel 6.39

$$\exists x. \exists y. x = y \quad \exists y. \exists x. x = y$$

Mit  $S$  bezeichnen wir die Menge der arithmetischen Sätze.

Die Menge der **wahren** Sätze der Arithmetik nennen wir  $W$ :

### Definition 6.40

$(t_1 = t_2) W$  gdw  $t_1$  und  $t_2$  den selben Wert haben.

$\neg F W$  gdw  $F W$

$(F \wedge G) W$  gdw  $F W$  und  $G W$

$(F \vee G) W$  gdw  $F W$  oder  $G W$

$\exists x. F(x)$  gdw es  $n \in \mathbb{N}$  gibt, so dass  $F(n) W$

### Fakt 6.41

*Für jeden Satz  $F$  gilt entweder  $F W$  oder  $\neg F W$*

NB Ob eine Formel mit freien Variablen wahr ist, kann vom Wert der freien Variablen abhängen:

$$\exists x. x + x = y$$

Daher haben wir Wahrheit nur für Sätze definiert.

### Definition 6.42

Eine partielle Funktion  $f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$  ist **arithmetisch repräsentierbar** gdw es eine Formel  $F(x_1, \dots, x_k, y)$  gibt, so dass für alle  $n_1, \dots, n_k, m \in \mathbb{N}$  gilt:

$$f(n_1, \dots, n_k) = m \quad \text{gdw} \quad F(n_1, \dots, n_k, m) \text{ W}$$

### Satz 6.43

*Jede WHILE-berechenbare Funktion ist arithmetisch repräsentierbar.*

## Satz 6.44

*W ist nicht entscheidbar.*

## Korollar 6.45

*W ist nicht semi-entscheidbar.*

Wir kodieren Beweise als Zahlen.

### Definition 6.46

Ein **Beweissystem** für die Arithmetik ist ein entscheidbares Prädikat

$$Bew : \mathbb{N} \times S \rightarrow \{0, 1\}$$

wobei wir  $Bew(b, F)$  lesen als „ $b$  ist Beweis für Formel  $F$ “.

Ein Beweissystem  $Bew$  ist **korrekt** gdw

$$Bew(b, F) \implies F \text{ W.}$$

Ein Beweissystem  $Bew$  ist **vollständig** gdw

$$F \text{ W} \implies \text{es gibt } b \text{ mit } Bew(b, F).$$

## Satz 6.47 (Gödel)

*Es gibt kein korrektes und vollständiges Beweissystem für die Arithmetik.*

### Beweis:

Denn mit jedem korrekten und vollständigen Beweissystem kann man  $\chi'_W(F)$  programmieren:

$b := 0$

**while**  $Bew(b, F) = 0$  **do**  $b := b + 1$

output(1)



## 6.6 Die Entscheidbarkeit der Presburger Arithmetik

Syntax der Presburger Arithmetik:

Variablen:  $V \rightarrow x \mid y \mid z \mid \dots$

Zahlen:  $N \rightarrow 0 \mid 1 \mid 2 \mid \dots$

Terme:  $T \rightarrow V \mid N \mid T + T$

Formeln:  $F \rightarrow (T = T) \mid \neg F \mid (F \wedge F) \mid (F \vee F)$   
 $\mid \exists V. F$

Wir betrachten  $\forall x. F$  als Abk. für  $\neg \exists x. \neg F$ .

### Satz 6.48

*Für Sätze der Presburger Arithmetik ist entscheidbar, ob sie wahr sind.*



# Mojzesz Presburger.

Über die Vollständigkeit eines gewissen Systems der Arithmetik ganzer Zahlen, in welchem die Addition als einzige Operation hervortritt. 1929.

## Mojzesz Presburger 1904 – 1943

### YAD VASHEM

The Holocaust Martyrs' and Heroes' Remembrance Authority  
Hall of Names - P.O.B. 3477, Jerusalem 91034 www.yadvashem.org



### יד ושם

רשות הזיכרון לשואה ולגבורה  
היכל השמות - ת.ד. 3477, ירושלים 91034

### Page of Testimony דף עד

דף עד לרישום והנצחה של הנספים בשואה; נא למלא דף עבור כל נספה בנפרד, בכתב ברור ובאותיות דפוס.  
Page of Testimony for commemoration of the Jews who perished during the Shoah; please submit a separate form for each victim, in block capitals



חוק זכרון השואה והגבורה - תשי"ג 1953 קובע בסעיף 2 כי יתקדפו של די וסם הוא לסמן אל המולדת את גורם של כל אלה שני הנהיג שגולה וססו את דם, נלמדו ומדו כאיבי ובשוריו ולהתיב עם זכר לזכר, לקהילות, למוסדות ולמסדות ששרדו בגלל המתינות למם היהודי.

The Martyrs' and Heroes' Remembrance Law 5713-1953 determines in section 2 that: "The task of Yad Vashem is to gather into the homeland material regarding all those members of the Jewish people who laid down their lives, who fought and rebelled against the Nazi enemy and his collaborators, and to perpetuate their names and those of the communities, organizations and institutions which were destroyed because they were Jewish".

שם משפחה של הנספה: שם משפחה לפני הנישואין: Victim's family name: שם משפחה לפני הנישואין:

PRESBURGER

שם פרטי (גם שם חיבה/כינוי): שם משפחה קודם/אחר: Previous/other family name: שם פרטי (גם שם חיבה/כינוי):

MOJZESZ O MIETEK ?

Approx. age at death: 43	גיל משוער בעת המות:	Date of birth: 1904	תאריך לידה:	Gender: M/F	מין:	Title: philosopher	תואר:
Nationality: POLISH	מדינות:	Country: POLAND	ארץ:	Region: ?	מחוז:	Place of birth: ?	מקום לידה:
Victim's father:	Family name: שם משפחה:	First name: שם פרטי:	אב הנספה:	Victim's mother:	Maiden name: שם לפני הנישואין:	First name: שם פרטי:	אם הנספה:
Victim's wife/	No. of מס':	Family status: מצב משפחתי:	Maiden name: שם לפני הנישואין:	First name: שם פרטי:	אשת/בעל		

**Presburger Arithmetik** = normale Arithmetik  
ohne **Multiplikation**

**Arithmetik** : hochgradig unentscheidbar :-(  
sogar **sogar unvollständig** :-((

⇒ Hilberts 10tes Problem  
⇒ Gödels Theorem

## Vereinfachte Presburger Formeln:

$$\begin{array}{l} \phi \quad ::= \quad x + y = z \quad | \quad x = n \quad | \\ \phi_1 \wedge \phi_2 \quad | \quad \neg \phi \quad | \\ \exists x. \phi \end{array}$$

## Bemerkungen

- Durch sukzessive Addition kann man Multiplikation mit Konstanten simulieren.  
(Wie?)
- Das Rucksackproblem lässt sich in PA ausdrücken.  
(Wie?)

**Allgemeineres Ziel:** **PSAT**

Finde Werte in  $\mathbb{N}$  für die freien Variablen , so dass  $\phi$  gilt ...

**Bemerkung:**

Ganzzahlige Optimierung lässt sich als PSAT-Problem ausdrücken.  
(Wie?)

**Idee:** Codiere die Werte der Variablen als Worte ...

213	t	1	0	1	0	1	0	1	1
42	z	0	1	0	1	0	1	0	0
89	y	1	0	0	1	1	0	1	0
17	x	1	0	0	0	1	0	0	0

## Allgemeineres Ziel:

## PSAT

Finde Werte in  $\mathbb{N}$  für die freien Variablen, so dass  $\phi$  gilt ...

## Bemerkung:

Ganzzahlige Optimierung lässt sich als PSAT-Problem ausdrücken.  
(Wie?)

## Idee:

Codiere die Werte der Variablen als Worte ...

213	t	1	0	1	0	1	0	1	1
42	z	0	1	0	1	0	1	0	0
89	y	1	0	0	1	1	0	1	0
17	x	1	0	0	0	1	0	0	0

## Allgemeineres Ziel:

## PSAT

Finde Werte in  $\mathbb{N}$  für die freien Variablen, so dass  $\phi$  gilt ...

## Bemerkung:

Ganzzahlige Optimierung lässt sich als PSAT-Problem ausdrücken.  
(Wie?)

## Idee:

Codiere die Werte der Variablen als Worte ...

213	t	1	0	1	0	1	0	1	1
42	z	0	1	0	1	0	1	0	0
89	y	1	0	0	1	1	0	1	0
17	x	1	0	0	0	1	0	0	0

## Allgemeineres Ziel:

## PSAT

Finde Werte in  $\mathbb{N}$  für die freien Variablen, so dass  $\phi$  gilt ...

## Bemerkung:

Ganzzahlige Optimierung lässt sich als PSAT-Problem ausdrücken.  
(Wie?)

## Idee:

Codiere die Werte der Variablen als Worte ...

213	t	1	0	1	0	1	0	1	1
42	z	0	1	0	1	0	1	0	0
89	y	1	0	0	1	1	0	1	0
17	x	1	0	0	0	1	0	0	0

**Allgemeineres Ziel:** **PSAT**

Finde Werte in  $\mathbb{N}$  für die freien Variablen , so dass  $\phi$  gilt ...

**Bemerkung:**

Ganzzahlige Optimierung lässt sich als PSAT-Problem ausdrücken.  
(Wie?)

**Idee:** Codiere die Werte der Variablen als Worte ...

213	t	1	0	1	0	1	0	1	1
42	z	0	1	0	1	0	1	0	0
89	y	1	0	0	1	1	0	1	0
17	x	1	0	0	0	1	0	0	0

## Allgemeineres Ziel:

## PSAT

Finde Werte in  $\mathbb{N}$  für die freien Variablen, so dass  $\phi$  gilt ...

## Bemerkung:

Ganzzahlige Optimierung lässt sich als PSAT-Problem ausdrücken.  
(Wie?)

## Idee:

Codiere die Werte der Variablen als Worte ...

213	t	1	0	1	0	1	0	1	1
42	z	0	1	0	1	0	1	0	0
89	y	1	0	0	1	1	0	1	0
17	x	1	0	0	0	1	0	0	0

**Allgemeineres Ziel:** **PSAT**

Finde Werte in  $\mathbb{N}$  für die freien Variablen, so dass  $\phi$  gilt ...

**Bemerkung:**

Ganzzahlige Optimierung lässt sich als PSAT-Problem ausdrücken.  
(Wie?)

**Idee:** Codiere die Werte der Variablen als Worte ...

213	t	1	0	1	0	1	0	1	1
42	z	0	1	0	1	0	1	0	0
89	y	1	0	0	1	1	0	1	0
17	x	1	0	0	0	1	0	0	0

## Allgemeineres Ziel:

## PSAT

Finde Werte in  $\mathbb{N}$  für die freien Variablen, so dass  $\phi$  gilt ...

## Bemerkung:

Ganzzahlige Optimierung lässt sich als PSAT-Problem ausdrücken.  
(Wie?)

## Idee:

Codiere die Werte der Variablen als Worte ...

213	t	1	0	1	0	1	0	1	1
42	z	0	1	0	1	0	1	0	0
89	y	1	0	0	1	1	0	1	0
17	x	1	0	0	0	1	0	0	0

## Allgemeineres Ziel:

## PSAT

Finde Werte in  $\mathbb{N}$  für die freien Variablen, so dass  $\phi$  gilt ...

## Bemerkung:

Ganzzahlige Optimierung lässt sich als PSAT-Problem ausdrücken.  
(Wie?)

## Idee:

Codiere die Werte der Variablen als Worte ...

213	t	1	0	1	0	1	0	1	1
42	z	0	1	0	1	0	1	0	0
89	y	1	0	0	1	1	0	1	0
17	x	1	0	0	0	1	0	0	0

**Allgemeineres Ziel:** PSAT

Finde Werte in  $\mathbb{N}$  für die freien Variablen , so dass  $\phi$  gilt ...

**Bemerkung:**

Ganzzahlige Optimierung lässt sich als PSAT-Problem ausdrücken.  
(Wie?)

**Idee:** Codiere die Werte der Variablen als Worte ...

213	t	1	0	1	0	1	0	1	1
42	z	0	1	0	1	0	1	0	0
89	y	1	0	0	1	1	0	1	0
17	x	1	0	0	0	1	0	0	0

## Beobachtung:

Die Menge der erfüllenden Variablenbelegungen ist regulär !!

$$\begin{array}{lll} \phi_1 \wedge \phi_2 & \implies & \mathcal{L}(\phi_1) \cap \mathcal{L}(\phi_2) \quad (\text{Durchschnitt}) \\ \neg \phi & \implies & \overline{\mathcal{L}(\phi)} \quad (\text{Komplement}) \\ \exists x : \phi & \implies & \pi_x(\mathcal{L}(\phi)) \quad (\text{Projektion}) \end{array}$$

## Achtung:

- Ein akzeptiertes Tupel kann immer durch führende Nullen verlängert werden !
- bleibt unter Vereinigung, Durchschnitt und Komplement erhalten !!
- Wie sieht das mit der Projektion aus ?

## Weg-Projizierung der $x$ -Komponente:

213	<b>t</b>	1	0	1	0	1	0	1	1
42	<b>z</b>	0	1	0	1	0	1	0	0
89	<b>y</b>	1	0	0	1	1	0	1	0
17	<b>x</b>	1	0	0	0	1	0	0	0

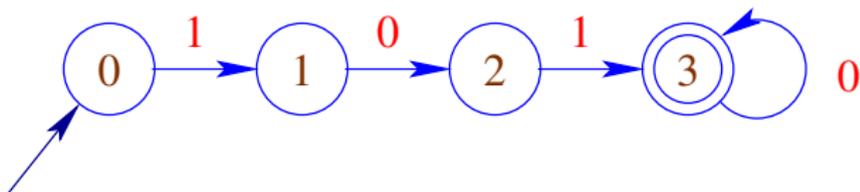
## Weg-Projizierung der $x$ -Komponente:

213	t	1	0	1	0	1	0	1	1
42	z	0	1	0	1	0	1	0	0
89	y	1	0	0	1	1	0	1	0

- Nun werden möglicherweise Tupel von Zahlen erst nach Anhängen von geeignet vielen führenden Nullen akzeptiert !
- Der Automat muss so komplettiert werden, dass  $q$  bereits akzeptierend ist, wenn von  $q$  aus mit Nullen ein akzeptierender Zustand erreicht werden kann.

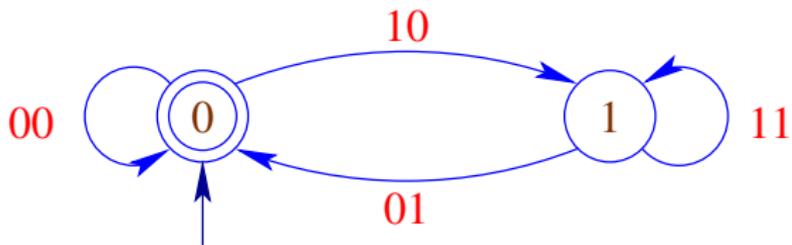
## Automaten für Basis-Prädikate:

$$x = 5$$



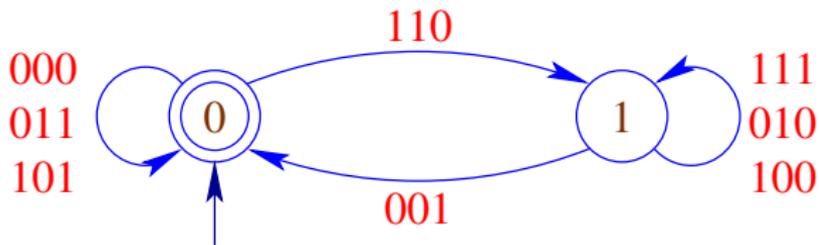
## Automaten für Basis-Prädikate:

$$x+x = y$$



## Automaten für Basis-Prädikate:

$$x+y = z$$



## Ergebnisse:

Ferrante, Rackoff,1973 :  $\text{PSAT} \leq \text{DSPACE}(2^{2^{c \cdot n}})$

Fischer, Rabin,1974 :  $\text{PSAT} \geq \text{NTIME}(2^{2^{c \cdot n}})$