Lehrstuhl für Theoretische Informatik
School of Computation, Information and Technology
Technische Universität München

Esolution
Sticker mit SRID hier einkleben

Hinweise zur Personalisierung:

- Ihre Prüfung wird bei der Anwesenheitskontrolle durch Aufkleben eines Codes personalisiert.
- Dieser enthält lediglich eine fortlaufende Nummer, welche auch auf der Anwesenheitsliste neben dem Unterschriftenfeld vermerkt ist.
- Diese wird als Pseudonym verwendet, um eine eindeutige Zuordnung Ihrer Prüfung zu ermöglichen.

Einführung in die Theoretische Informatik

Klausur:	IN0011 / Endterm	**Datum:**	Samstag, 20. Juli 2024
Prüfer:	Prof. Javier Esparza Philipp Czerner	**Uhrzeit:**	11:00 – 14:00

Bearbeitungshinweise

- Diese Klausur umfasst **16 Seiten** mit insgesamt **8 Aufgaben**.
  Bitte kontrollieren Sie jetzt, dass Sie eine vollständige Angabe erhalten haben.
- Die Gesamtpunktzahl in dieser Klausur beträgt 105 Punkte, von denen 5 Bonuspunkte sind, d.h. sie zählen wie normale Punkte, werden bei der Berechnung des Notenschemas jedoch außer Acht gelassen.
- Das Heraustrennen von Seiten aus der Prüfung ist untersagt.
- Als Hilfsmittel sind zugelassen:
  - ein **beidseitig handschriftlich beschriebenes DIN A4 Blatt**
  - ein **analoges Wörterbuch** Deutsch $\leftrightarrow$ Muttersprache **ohne Anmerkungen**
- Mit * gekennzeichnete Teilaufgaben sind ohne Kenntnis der Ergebnisse vorheriger Teilaufgaben lösbar.
- Schreiben Sie weder mit roter / grüner Farbe noch mit Bleistift.
- Schalten Sie alle mitgeführten elektronischen Geräte vollständig aus, verstauen Sie diese in Ihrer Tasche und verschließen Sie diese.
- $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, ...\}$

Hörsaal verlassen von __________ bis __________ / Vorzeitige Abgabe um __________

Aufgabe 1 Quiz: Reguläre und kontextfreie Sprachen (16 Punkte)

Teilaufgaben (a-e): Für diese Fragen ist eine Begründung nicht gefordert. Sie erhalten die Punkte auf eine Teilaufgabe genau dann, wenn Sie alle Antwortmöglichkeiten korrekt angekreuzt haben. **Es ist immer mindestens eine Antwortmöglichkeit richtig.** Jede Frage bringt 2P.

Kreuzen Sie richtige Antworten an ☒
Kreuze können durch vollständiges Ausfüllen gestrichen werden ■
Gestrichene Antworten können durch nebenstehende Markierung erneut angekreuzt werden ×■

In dieser Aufgabe verwenden wir durchgehend das Alphabet $\Sigma := \{a, b\}$.

a)* Sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine **endliche** Sprache mit $|L| = |L^*|$. Welche Aussagen sind wahr? $L = \{\varepsilon\}$ muss gelten.

☒ L ist regulär ☒ $\varepsilon \in L$ ☒ $|L| = |LL|$

b)* Sei $L \subseteq \Sigma^*$ und $L' := \{w \in L : |w|^2 \leq 10|w|\}$. Welche Aussagen sind wahr? L ist endlich.

☒ L' ist regulär ☒ L' ist kontextfrei ☒ L' ist deterministisch kontextfrei

c)* Sei $L \subseteq \Sigma^*$ regulär und $k > 0$. Welche der folgenden Sprachen sind regulär?

☒ $\{w \in L : |w| \equiv 0 \pmod k\}$ ☒ $\{w_1 \cdots w_k : w_1, \dots, w_k \in L\}$ ☐ $\{w^k : w \in L\}$

Sei L' die resultierende Sprache. (1) $L' = L \cap (\Sigma^k)^*$, Abgeschlossenheit unter Schnitt, (2) $L' = L^k$, Abgeschlossenheit unter Konkatenation, (3) für $k = 2$ ist L' bereits als nicht-regulär bekannt.

d)* Sei $L \subseteq \Sigma^*$ kontextfrei. Welche der folgenden Sprachen sind kontextfrei?
Hinweis: $L^R := \{x_k \cdots x_1 : x_1 \cdots x_k \in L \wedge x_1, \dots, x_k \in \Sigma \wedge k \geq 0\}$ ist die Spiegelung von L.

☐ $\overline{L}$ ☒ $L \cup L^R$ ☐ $L \cap L^R$

(1) ist aus der Vorlesung bekannt (Satz 4.32), (2) folgt aus den bekannten Abschlusseigenschaften, (3) folgt aus einer leichten Variation des Gegenbeispiels aus Satz 4.32: $L = \{a^n b^n a^m : n, m > 0\}$

e)* Sei G die Grammatik mit Produktionen $S \to aT$, $T \to Sb$. Welche Aussagen sind wahr?

☐ G ist rechtslinear ☒ G ist kontextfrei ☒ $L(G)$ ist regulär ☒ $L(G)$ ist kontextfrei

(1) wegen $T \to Sb$. (2) nach Definition. (3,4) Es gilt $L(G) = \emptyset$, also ist $L(G)$ regulär und kontextfrei.

0 1 2 3

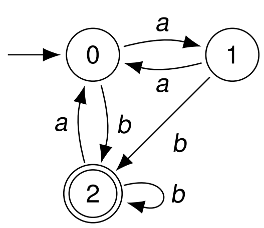
f)* Seien $L_1, L_2, L_3 \subseteq \{a, b\}^*$ Sprachen, sodass L_1 genau die Wörter gerader Länge enthält, L_2 genau die Wörter enthält, in denen auf jedes a unmittelbar ein b folgt, und $L_3 := L_1 \cap L_2$. Es gilt etwa $\varepsilon, ab, babb \in L_3$ und $b, ba, aabb \notin L_3$. Geben Sie reguläre Ausdrücke r_1, r_2, r_3 an, sodass $L(r_i) = L_i$, für $i \in \{1, 2, 3\}$.

r_1: $((a \mid b)(a \mid b))^*$ r_2: $(b \mid ab)^*$

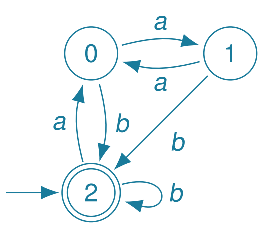
r_3: $((ba)^* bb \mid ab)^*$

0 1 2 3

g)* Sei M der folgende DFA. Gibt es einen DFA M', sodass $L(M)$ und $L(M')$ die gleichen Residualsprachen haben, aber nicht gleich sind; also $\{L(M)^w : w \in \Sigma^*\} = \{L(M')^w : w \in \Sigma^*\}$ und $L(M) \neq L(M')$?
Falls ja, geben Sie einen solchen DFA an; falls nein, begründen Sie Ihre Antwort kurz.



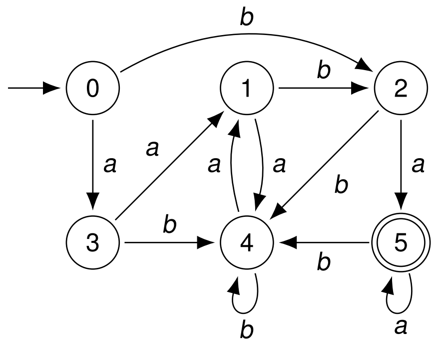
Ihre Wahl: ☒ Wahr, DFA ☐ Falsch, Begründung



Aufgabe 2 **Residualsprachen und Minimierung (18 Punkte)**

a)* Minimieren Sie den folgenden DFA M unter Verwendung des erweiterten Minimierungsalgorithmus. Bestimmen Sie also für jedes Paar an Zuständen (q, p), ob diese äquivalent sind. Wenn ja, tragen Sie ein Gleichheitszeichen „=“ in die entsprechende Zelle ein, wenn nein, tragen Sie ein Wort ein, das dies beweist.

Hinweis: Falls Sie nicht den erweiterten Minimierungsalgorithmus, sondern den Minimierungsalgorithmus aus der Vorlesung verwenden, können Sie trotzdem noch bis zu 3 Punkte erhalten.



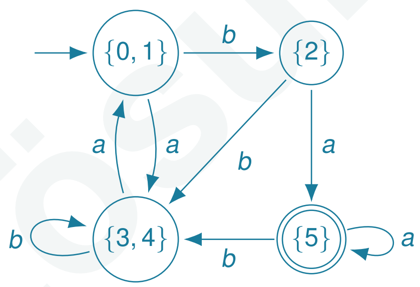
	0	1	2	3	4	5
0	=					
1	=	=				
2	a	a	=			
3	ba	ba	a	=		
4	ba	ba	a	=	=	
5	ε	ε	ε	ε	ε	=

b) Sei Q die Menge der Zustände von M, also $Q = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Bestimmen Sie $S := \{q \in Q : [q]_M = \{q\}\}$, also die Menge der Zustände, die nur zu sich selbst äquivalent sind. Beschreiben Sie, wie die Menge sich aus der Tabelle in a) ergibt.

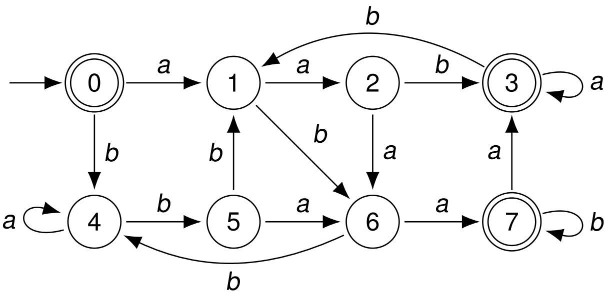
$S = \{2, 5\}$

Erklärung: Genau die Zustände, in deren Zeile oder Spalte sich *kein* „=“ befindet, sind in S.

c) Zeichnen Sie den minimalen DFA, der $L(M)$ erkennt. Beschriften Sie jeden Zustand mit der entsprechenden Menge an äquivalenten Zuständen aus M.



d)* Wir betrachten den folgenden DFA M':



Nach Vorlesung korrespondiert jeder Zustand von M' zu einer Residualsprache. Geben Sie für jeden Zustand das kürzeste Wort an, das in der entsprechenden Residualsprache liegt. Falls es mehrere passende kürzeste Wörter gibt, geben Sie das alphabetisch kleinste davon an. Falls die entsprechende Residualsprache leer ist, geben Sie stattdessen „$\emptyset$“ an.

0:	ε	1:	ab	2:	b	3:	ε
4:	baa	5:	aa	6:	a	7:	ε

e)* Sei $L := \{wcw^R : w \in \{a,b\}^*\} \subseteq \{a,b,c\}^*$. Es gilt also z.B. $c, abcba \in L$ und $\varepsilon, abba, abcab \notin L$. Sei $n \geq 0$ beliebig. Bestimmen Sie die folgenden Residualsprachen und geben Sie sie als Mengen an.

$L^{a^n b^n c} = \{b^n a^n\}$

$L^{cba^n} = \emptyset$

$L^{a^n} = L\{a^n\} = \{wcw^R a^n : w \in \{a,b\}^*\}$

f)* Sei $L := \{a^n b^m : n, m \geq 0 \wedge n \neq m\}$. Zeigen Sie, dass L nicht regulär ist, indem Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Wort $w_n \in \{a,b\}^*$ angeben, sodass $L^{w_0}, L^{w_1}, \ldots$ paarweise verschieden sind, und beweisen Sie dies.

$w_n := a^{n+1}b$

Beweis $L^{w_i} \neq L^{w_j}$. für $i, j \in \mathbb{N}, i \neq j$:

Es gilt $L^{w_n} = \{b^i : i \in \mathbb{N} \wedge i \neq n\}$. Dann folgt $b^i \notin L^{w_i}$ und $b^i \in L^{w_j}$.

Aufgabe 3 NFA-Konstruktion (13 Punkte)

Sei $\Sigma := \{0, 1\}$. Für eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ bezeichnet $L^{\downarrow 0}$ die Sprache, die man erhält, wenn man den Wörtern aus L jeweils genau zwei Nullen entfernt. Z.B. gilt $\{0, 010, 1\}^{\downarrow 0} = \{1\}$ und $\{1, 101, 0\}^{\downarrow 0} = \emptyset$. Formal:

$$L^{\downarrow 0} := \{uvw : u0v0w \in L \wedge u, v, w \in \Sigma^*\}. \tag{3.1}$$

Beachten Sie insbesondere, dass das Löschen nicht optional ist.

a)* Gegeben sind drei reguläre Ausdrücke r_1, r_2, r_3 über Σ. Geben Sie jeweils reguläre Ausdrücke s_1, s_2, s_3 an, sodass $L(s_i) = L(r_i)^{\downarrow 0}$ für $i \in \{1, 2, 3\}$.

$r_1 := (0 \mid 1)(0 \mid 1)$, $s_1 := \epsilon$ $r_2 := (0 \mid 1)^*$, $s_2 := (0 \mid 1)^*$

$r_3 := (01)^*$, $s_3 := (01)^*1(01)^*1(01)^*$

b)* Sei $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein beliebiger NFA. Es gilt weiterhin $\Sigma = \{0, 1\}$. Konstruieren Sie einen ϵ-NFA $M' = (Q', \Sigma, \delta', q'_0, F')$ mit $L(M') = L(M)^{\downarrow 0}$, indem Sie Q', q'_0, F', und δ' präzise angeben. Sie können (müssen aber nicht) zusätzlich die Idee hinter Ihrer Konstruktion erläutern. Dies kann uns helfen, Ihre Definitionen zu verstehen. Wenden Sie anschließend Ihre Konstruktion auf den nachfolgenden NFA M_1 an und zeichnen Sie das Ergebnis.
Hinweis: Sie können δ' in Form von Gleichungen „$\delta'(q', x) := \{...\}$" oder alternativ Mengen von Tripeln „$\{(q', x, p') \mid ...\}$" mit $q', p' \in Q', x \in \Sigma \cup \{\epsilon\}$ angeben.

$Q' := \{q^i \mid q \in Q, i \in \{0, 1, 2\}\}$

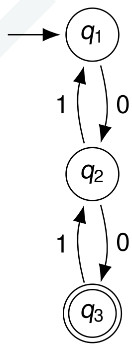
$q'_0 := q^0_0$ $F' := \{q^2_f \mid q_f \in F\}$

δ':

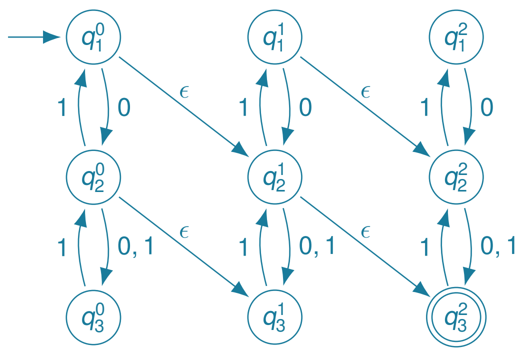
$\delta'(q^i, a) := \{p^i \mid p \in \delta(q, a)\}$ für $i \in \{0, 1, 2\}, a \in \Sigma$
$\delta'(q^i, \epsilon) := \{p^{i+1} \mid p \in \delta(q, 0)\}$ für $i \in \{0, 1\}$

Konstruktionsidee (optional): Wir verwenden drei Kopien M^0, M^1, M^2 von M. Der Automat startet in M^0. Zu jedem Zeitpunkt, an dem eine 0 gelesen werden könnte, erlauben wir alternativ statt der 0 ein ϵ zu lesen und in den korrespondierenden Zustand in M_1 zu wechseln. Analoge für M^1 zu M^2. In M^2 wurden somit zwei Nullen ausgelassen.

NFA M_1:



Ihr Konstruktionsergebnis (ein ϵ-NFA):



0
1
2
3

c)* Es gilt weiterhin $\Sigma = \{0, 1\}$. Für eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ bezeichnet $L^{\uparrow 0}$ die Sprache, die man erhält, wenn man den Wörtern aus L jeweils zwei Nullen hinzufügt. Formal gilt

$$L^{\uparrow 0} := \{u0v0w \mid uvw \in L \wedge u, v, w \in \Sigma^*\}. \tag{3.2}$$

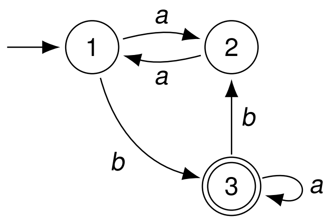
Zeigen oder widerlegen Sie: Für jede nichtleere Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ gilt $L^{\uparrow 0} \neq L$. Falls Sie die Aussage mit einem Gegenbeispiel widerlegen möchten, zeigen Sie auch die Korrektheit des Gegenbeispiels.

Ihre Wahl: ☒ Wahr ☐ Falsch

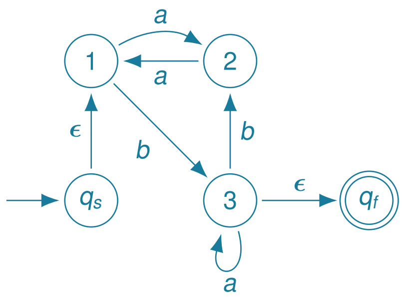
Beweis: Da $L \neq \emptyset$ existiert ein kürzestes Wort $w \in L$. Für alle $v \in L^{\uparrow 0}$ gilt $|v| > |w|$. Somit $w \notin L^{\uparrow 0}$.

Aufgabe 4 NFA zu regulärem Ausdruck (12 Punkte)

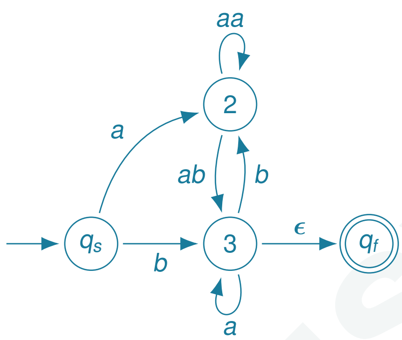
a)* Wir betrachten den rechts abgebildeten NFA N über dem Alphabet $\{a, b\}$. Berechnen Sie mit dem graphischen Algorithmus aus der Vorlesung (nicht mit Ardens Lemma) einen regulären Ausdruck r, sodass $L(r) = L(N)$. Geben Sie dabei nach **jeder** Anwendung einer Transformationsregel den Automaten graphisch an und vereinfachen Sie die regulären Ausdrücke in den Zwischenschritten **nicht**. (Ausnahme: Sie dürfen die Vereinfachung $\epsilon\alpha \equiv \alpha\epsilon \equiv \alpha$ anwenden.) Entfernen Sie die Zustände **in aufsteigender Reihenfolge** (bezüglich ihrer Zustandsnummer).



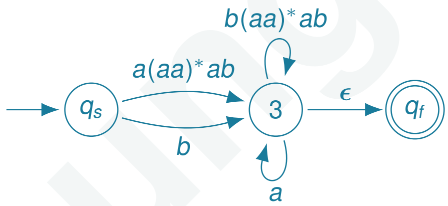
Schritt 1:



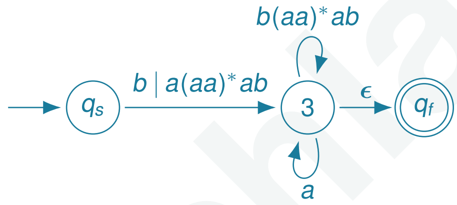
Schritt 2:



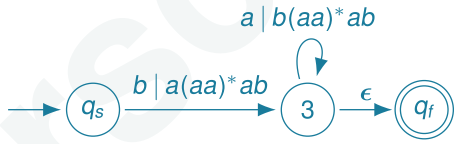
Schritt 3:



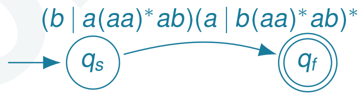
Schritt 4:



Schritt 5:



Schritt 6:



b)* Geben Sie eine rechtslineare Grammatik für $L(N)$ mit höchstens 3 Nichtterminalen an.
Hinweis: In rechtslinearen Grammatiken sind keine ε-Produktionen außer $S \to \varepsilon$ erlaubt.

$S \to aX_2 \mid bX_3 \mid b \qquad X_2 \to aS \qquad X_3 \to aX_3 \mid bX_2 \mid a$

Aufgabe 5 **Kontextfreie Sprachen (13 Punkte)**

Gegeben sind folgende drei Sprachen über dem Alphabet $\Sigma := \{a, b\}$:

$$L_1 := \{a^i b^j a^k : (i = j \vee j = k) \wedge i, j, k \geq 0\}$$
$$L_2 := \{a^n w : w \in \Sigma^* \wedge |w| \geq n \wedge n > 0\}$$
$$L_3 := \{a^i b^j a^k : j > i + k \wedge i, j, k \geq 0\}$$

a)* Geben Sie kontextfreie Grammatiken für L_1, L_2, L_3 mit jeweils höchstens 5 Nichtterminalen und 10 Produktionen an.

Hinweis: Sie dürfen ε-Produktionen verwenden.

Grammatik für L_1:

$S \to TA \mid AU$
$T \to aTb \mid \varepsilon$
$A \to aA \mid \varepsilon$
$U \to bUa \mid \varepsilon$

Grammatik für L_2:

$S \to aT$
$T \to aT \mid bT \mid a \mid b$

Alternative Lösung:
$S \to aSX \mid SX \mid aX$
$X \to a \mid b$

Grammatik für L_3:

$S \to TBU$
$T \to aTb \mid \varepsilon$
$B \to bB \mid b$
$U \to bUa \mid \varepsilon$

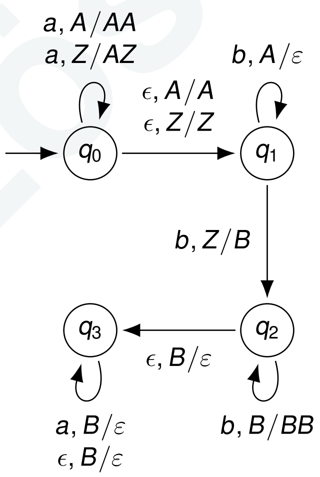
b)* Genau eine der drei Sprachen ist sogar regulär. Entscheiden Sie welche und geben Sie einen regulären Ausdruck an, der die gleiche Sprache beschreibt.

Ihre Wahl: ☐ L_1 ☒ L_2 ☐ L_3

Regulärer Ausdruck: $a(a \mid b)^+$ Alternativ: $a(a \mid b)(a \mid b)^*$

c)* Untenstehend finden Sie einen PDA M, der mit leerem Keller akzeptiert und das initiale Kellerzeichen Z verwendet. Bestimmen Sie für jede Sprache $L_i \in \{L_1, L_2, L_3\}$ jeweils, ob $L_\epsilon(M) = L_i$ gilt. Falls nein, geben Sie ein Wort w mit Länge höchstens 2 an, sodass w in genau einer der Sprachen $L_\epsilon(M)$ und L_i ist.

Hinweis: Es gilt $L_\epsilon(M) = L_i$ für genau ein $i \in \{1, 2, 3\}$.



☐ $L_1 = L_\epsilon(M)$ ☒ $L_1 \neq L_\epsilon(M)$, Wort: Möglichkeiten: $\varepsilon, a, b, aa, ab, ba, bb$

☐ $L_2 = L_\epsilon(M)$ ☒ $L_2 \neq L_\epsilon(M)$, Wort: Möglichkeiten: b, aa, ab, bb

☒ $L_3 = L_\epsilon(M)$ ☐ $L_3 \neq L_\epsilon(M)$, Wort:

Aufgabe 6 Quiz: Berechenbarkeit und Komplexität (14 Punkte)

Teilaufgaben (a-e): Für diese Fragen ist eine Begründung nicht gefordert. Sie erhalten die Punkte auf eine Teilaufgabe genau dann, wenn Sie alle Antwortmöglichkeiten korrekt angekreuzt haben. **Es ist immer mindestens eine Antwortmöglichkeit richtig.** Jede Frage bringt 2P.

In dieser Aufgabe verwenden wir durchgehend das Alphabet $\Sigma := \{0, 1\}$.

a)* Welche der folgenden Sprachen sind entscheidbar?

☐ $\{w \in \Sigma^* : \varphi_w \text{ ist total}\}$ ☐ $\{w \in \Sigma^* : \varphi_w(0) = 0\}$ ☒ $\{w \in \Sigma^* : \varphi_w \text{ ist berechenbar}\}$

(1,2) Satz von Rice. (3) φ_w ist immer berechenbar.

b)* Sei L eine beliebige unentscheidbare Sprache und $a \in \Sigma$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?
Hinweis: L^a ist die Residualsprache bezüglich a von L.

☒ $\overline{L}$ ist unentscheidbar ☐ L^a ist unentscheidbar ☐ Es gibt keine TM M mit $L(M) = L$

(1) Wäre $\overline{L}$ entscheidbar, wäre L nach Abschlusseigenschaften auch entscheidbar. (2) Gegenbeispiel: $L = \{1\}\mathcal{H}_0$. (3) Falls L semi-entscheidbar ist, gibt es eine.

c)* Sei M eine beliebige deterministische Turingmaschine, sodass es eine Eingabe $w \in \Sigma^*$ gibt, auf der M unendlich viele Schritte macht. Welche Aussagen sind wahr?

☒ $w \notin L(M)$ ☐ $L(M)$ ist unentscheidbar ☒ $L(M)$ ist semi-entscheidbar

(1) Sonst würde M auf w halten. (2) Es kann z.B. $L(M) = \emptyset$ gelten. (3) $L(M)$ ist immer semi-entscheidbar.

d)* Welche Aussagen sind wahr?

☒ Sei $L \in$ P. Dann gilt $\overline{L} \in$ NP. Sogar $\overline{L} \in$ P.

☒ Jede reguläre Sprache ist in NP. Sogar in P.

☒ Jede kontextfreie Sprache ist in P. Der CYK-Algorithmus braucht kubische, also polynomielle, Zeit, um das Wortproblem für CFGs zu entscheiden.

e)* Angenommen, P $\neq$ NP. Seien $A, B \subseteq \Sigma^*$ beliebige Sprachen, sodass $A \in$ NP und B NP-vollständig ist. Welche Aussagen sind wahr?

☐ $A \subseteq B$ ☐ $B \subseteq A$ ☒ $A \leq_p B$ ☐ $B \leq_p A$

(3) $A \leq_p B$ gilt nach Def. von NP-vollständig. Gegenbeispiele: (2,4) $A := \emptyset$, $B :=$ SAT, (1) $A := \Sigma^*$, $B :=$ SAT

f)* Seien $A, B \subseteq \Sigma^*$ beliebige Sprachen, sodass A unentscheidbar ist. Zeigen oder widerlegen Sie: Mindestens eine der Sprachen $A \cup B$ und $A \cup \overline{B}$ ist unentscheidbar.

0
1
2
3
4

☒ Wahr ☐ Falsch

Wären beide Sprachen entscheidbar, so wäre auch deren Schnitt, also $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A \cup (B \cap \overline{B}) = A$ entscheidbar.

Aufgabe 7 Reduktion (14 Punkte)

Zeigen Sie für jedes der folgenden Probleme A entweder, dass es in P liegt, oder, dass es NP-hart ist. Geben Sie hierfür jeweils eine geeignete polynomielle Reduktion an und begründen Sie deren Korrektheit. Reduktionsfunktionen müssen präzise definiert sein und Sie müssen klar angeben, welche Probleme Sie reduzieren. Die Korrektheit der Reduktion müssen Sie aber nur skizzieren und nicht formal beweisen.

Achtung: Auch um zu zeigen, dass das Problem in P liegt, ist eine Reduktion anzugeben!

Hinweis: Um zu zeigen, dass ein Problem A in P liegt, geben Sie eine Reduktion $A \leq_p B$ für ein $B \in$ P an, reduzieren Sie also A auf ein Problem B, von dem wir wissen, dass es in P liegt, z.B. 2COL oder 2KNF-SAT. Um zu zeigen, dass ein Problem A NP-hart ist, geben Sie eine Reduktion $B \leq_p A$ an, wobei B ein bekanntes NP-hartes Problem ist, etwa 3COL, SAT, oder CLIQUE.

0 1 2 3 4 5 6

a)* **Gegeben:** Drei KNF-Formeln F_1, F_2, F_3 mit Variablen aus V.
Problem A: Gibt es eine Belegung $\sigma : V \to \{0, 1\}$, die **genau zwei** der drei Formeln erfüllt?

Ihre Wahl: ☐ $A \in$ P ☒ A ist NP-hart

Reduktion: 3KNF-SAT $\leq_p A$

Reduktion von SAT: $f(F) = (F, x, \neg x)$
Korrektheitsbeweis: Wenn F erfüllbar mit $\sigma(F) = 1$, dann entweder $\sigma(F) = 1, \sigma(x) = 1, \sigma(\neg x) = 0$ oder $\sigma(F) = 1, \sigma(x) = 0, \sigma(\neg x) = 1$. In beiden Fällen erfüllt σ genau zwei der drei Formeln. Wenn eine Belegung σ genau zwei der drei Formeln erfüllt, dann muss $\sigma(F) = 1$ gelten, denn σ erfüllt genau eine der Formeln x und $\neg x$.

b)* **Gegeben:** Eine 2KNF-Formel F mit Variablenmenge $V = \{x_1, ..., x_n\}$, eine Menge $\{1, ..., \ell\}$ von Farben (mit $\ell > 0$) und eine Funktion $g : V \to \{1, ..., \ell\}$, die jeder Variable eine Farbe zuordnet.
Problem A**:** Gibt es eine erfüllende Belegung σ, sodass alle Variablen, die von σ zu Wahr gesetzt werden, unterschiedliche Farben haben? Formal: gibt es eine erfüllende Belegung $\sigma : V \to \{0, 1\}$ mit $g(x_i) \neq g(x_j)$ für alle $i < j \leq n$ mit $\sigma(x_i) = 1 = \sigma(x_j)$?

0 1 2 3 4 5 6 7 8

Ihre Wahl: ☒ $A \in \mathrm{P}$ ☐ A ist NP-hart

Reduktion: $A \leq_p$ 2KNF-SAT

Reduktion zu 2KNF-SAT: Sei

$$G := \bigwedge_{\substack{i<j \\ g(x_i)=g(x_j)}} (\neg x_i \vee \neg x_j)$$

Definiere die Reduktionsfunktion als $f(F) = F \wedge G$. Wir haben: $f(F) \in$ 2-KNF und $\sigma(G) = 1$ gdw. $\sigma(F) = 1$ und σ höchstens eine Variable jeder Farbe wahr macht.

Aufgabe 8 Bonus (5 Punkte)

Die Punkte dieser Aufgabe sind **Bonuspunkte**, d.h. sie zählen wie normale Punkte, werden bei der Berechnung des Notenschemas jedoch außer Acht gelassen.
Mindestens eine Antwortmöglichkeit ist immer richtig.

0 1 2

a)* Sei $\Sigma := \{a, b\}$. Für welche der folgenden Sprachen L_i, wobei $i \in \{1, 2, 3\}$, gilt, dass $(L_i)^*$ **nicht** regulär ist? (Es können mehrere sein.) Wählen Sie ein solches i und begründen Sie kurz, dass $(L_i)^*$ nicht regulär ist.

☐ $L_1 := \{(ab)^n : n \in \mathbb{N}\}$ ☒ $L_2 := \{a^n b^n : n \in \mathbb{N}\}$ ☐ $L_3 := \{a^n b^m : n, m \in \mathbb{N} \wedge n \neq m\}$

Begründung für $i = 2$:
Angenommen, L_2^* wäre regulär. Nach Abschlusseigenschaften wäre $L_2^* \cap L(a^*b^*) = \{a^n b^n : n \in \mathbb{N}\}$ auch regulär, ein Widerspruch.
(*Anm.:* L_1 ist regulär, und damit auch L_1^*. $a, b \in L_3$, und somit $L_3^* = \Sigma^*$.)

0 1

b)* Gibt es eine kontextfreie Grammatik G in Chomsky-Normalform mit höchstens 6 Produktionen und $L(G) = \{a^{12}, a^9\}$? Falls ja, geben Sie eine solche Grammatik an, falls nein, begründen Sie dies kurz.

☒ Ja, Grammatik: ☐ Nein, Begründung:

$S \rightarrow A_8 A_4 \mid A_8 A_1$ $A_8 \rightarrow A_4 A_4$ $A_2 \rightarrow A_1 A_1$
$A_4 \rightarrow A_2 A_2$ $A_1 \rightarrow a$

0 1 2

c)* Sei $L \subseteq \{0, 1\}^*$ eine beliebige kontextfreie und nicht reguläre Sprache. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? (Es können mehrere sein.) Wählen Sie eine solche Aussage und begründen Sie kurz, wieso diese Aussage wahr ist.

☒ Es gibt eine unentscheidbare Sprache $L' \subseteq L$. ☐ Jede Sprache $L' \subseteq L$ ist entscheidbar.

Begründung für Aussage 1 (1 oder 2):
Da L nicht regulär ist, muss L unendlich sein. Es gibt also überabzählbar viele Sprachen $L' \subseteq L$, und somit muss auch eine unentscheidbar sein.

Zusätzlicher Platz für Lösungen. Markieren Sie deutlich die Zuordnung zur jeweiligen Teilaufgabe. Vergessen Sie nicht, ungültige Lösungen zu streichen.