Lehrstuhl für Grundlagen der Software-Zuverlässigkeit und der theoretischen Informatik
School of Computation, Information and Technology
Technische Universität München

Eexam
Sticker mit SRID hier einkleben

Hinweise zur Personalisierung:

- Ihre Prüfung wird bei der Anwesenheitskontrolle durch Aufkleben eines Codes personalisiert.
- Dieser enthält lediglich eine fortlaufende Nummer, welche auch auf der Anwesenheitsliste neben dem Unterschriftenfeld vermerkt ist.
- Diese wird als Pseudonym verwendet, um eine eindeutige Zuordnung Ihrer Prüfung zu ermöglichen.

Einführung in die Theoretische Informatik

Klausur:	IN0011 / Endterm	**Datum:**	Samstag, 22. Juli 2023
Prüfer:	Prof. Javier Esparza	**Uhrzeit:**	09:00 – 12:00

	A 1	A 2	A 3	A 4	A 5	A 6	A 7	A 8
I								

Bearbeitungshinweise

- Diese Klausur umfasst **20 Seiten** mit insgesamt **8 Aufgaben**.
  Bitte kontrollieren Sie jetzt, dass Sie eine vollständige Angabe erhalten haben.
- Die Gesamtpunktzahl in dieser Klausur beträgt 100 Punkte.
- Zum Bestehen brauchen Sie 45 Punkte.
- Das Heraustrennen von Seiten aus der Prüfung ist untersagt.
- **Wenn Sie eine Aufgabe nicht im vorgesehenen Platz lösen können, verwenden Sie die zusätzlichen Blätter am Ende der Klausur und kennzeichnen Sie dies deutlich bei der entsprechenden Aufgabe.**
- Als Hilfsmittel sind zugelassen:
  - ein **doppelseitig beschriebenes DIN A4 Merkblatt**
  - ein **analoges Wörterbuch** Deutsch $\leftrightarrow$ Muttersprache **ohne Anmerkungen**
- Mit * gekennzeichnete Teilaufgaben sind ohne Kenntnis der Ergebnisse vorheriger Teilaufgaben lösbar.
- **Es werden nur solche Ergebnisse gewertet, bei denen der Lösungsweg erkennbar ist.** Auch Textaufgaben sind **grundsätzlich zu begründen**, sofern es in der jeweiligen Teilaufgabe nicht ausdrücklich anders vermerkt ist.
- Schreiben Sie weder mit roter / grüner Farbe noch mit Bleistift.
- Schalten Sie alle mitgeführten elektronischen Geräte vollständig aus, verstauen Sie diese in Ihrer Tasche und verschließen Sie diese.
- $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, ...\}$ und $\mathbb{N}_+ := \mathbb{N} \setminus \{0\}$

Hörsaal verlassen von __________ bis __________ / Vorzeitige Abgabe um __________

Aufgabe 1 Quiz Reguläre und Kontextfreie Sprachen (18 Punkte)

Bestimmen Sie für jede der folgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist. Falls die Aussage wahr ist, geben Sie eine kurze Begründung an. Andernfalls widerlegen Sie die Aussage, gegebenenfalls mit einem geeigneten Gegenbeispiel und Begründung, dass das Gegenbeispiel korrekt ist.
Wichtig: Antworten ohne Begründung werden nicht bewertet!

0 1 2 3

a)* **Aussage:** Für alle Sprachen A, B, C gilt $(A \setminus C)B = AB \setminus CB$.

0 1 2 3

b)* **Aussage:** Wenn $L \subseteq \Sigma^*$ regulär ist und $a \in \Sigma$, dann ist die Sprache aller Wörter aus L, die nicht mit a enden, regulär.

0 1 2 3

c)* **Aussage:** Es gibt einen minimalen DFA M mit maximal 4 Zuständen, sodass die minimale Pumping-Lemma-Zahl für $L(M)$ kleiner als die Anzahl der Zustände von M ist.

Erinnerung: Die Pumping-Lemma-Zahl n für eine Sprache L ist eine Zahl, sodass die Pumping-Lemma-Eigenschaft gilt. Genauer gesagt gibt es für alle $z \in L$ mit $|z| \geq n$ eine Zerlegung $z = uvw$ mit $v \neq \epsilon$, $|uv| \leq n$ und $\forall i \geq 0.\ uv^iw \in L$.

d)* Definition: Analog zu rechtslinearen Grammatiken ist eine Grammatik G *linkslinear*, wenn jede Produktion von G die Gestalt $X \to Ya$ oder $X \to a$ hat.

Aussage: Die Sprache $L(G)$ einer linkslinearen Grammatik G ist regulär.

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass reguläre Sprachen unter Spiegelung abgeschlossen sind, d.h. für jede reguläre Sprache L ist auch L^R regulär.

0 1 2 3

e)* **Aussage:** Wenn die Sprache einer kontextfreien Grammatik regulär ist, dann ist die Grammatik nicht mehrdeutig.

0 1 2 3

0 1 2 3

f)* **Aussage:** Wenn $A, B \subseteq \Sigma^*$ kontextfrei sind und $\epsilon \notin A$, dann sind alle Lösungen der Gleichung $X = AX \cup B$ kontextfrei.

Sie dürfen das folgende Theorem für diese Aufgabe verwenden: Für alle Sprachen $X, A, B \subseteq \Sigma^*$ mit $\epsilon \notin A$ gilt: $X = AX \cup B \implies X = A^*B$.

Aufgabe 2 Vom Regulären Ausdruck zum ϵ-NFA und Zurück (15 Punkte)

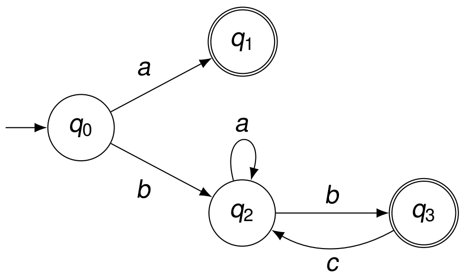
a)*

Gegeben sei der reguläre Ausdruck $r := (ab^* \mid c)^* \mid (b\emptyset)^*$ über dem Alphabet $\Sigma := \{a, b, c\}$. Berechnen Sie mit dem Algorithmus aus der Vorlesung einen ϵ-NFA N, sodass $L(N) = L(r)$ gilt. Geben Sie dabei nach **jeder** Anwendung einer Transformationsregel den Automaten graphisch an.

0
1
2
3
4
5

b)* Betrachten Sie nun den regulären Ausdruck $s := (0 \mid 1(10)^*(0 \mid 11)(01^*01 \mid 01^*00)^*1)^*$ über dem Alphabet $\Sigma := \{0, 1\}$. Wie viele Zustände hat der resultierende Automat, wenn Sie den Algorithmus ausführen würden? Begründen Sie Ihre Antwort!
Hinweis: Sie müssen den Algorithmus nicht ausführen.

c)* Wir betrachten den NFA $N := (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{a, b, c\}, \delta, q_0, \{q_1, q_3\})$, dessen Übergangsrelation δ durch folgende Skizze gegeben ist.



Berechnen Sie mit dem Algorithmus aus der Vorlesung einen regulären Ausdruck r, sodass $L(r) = L(N)$. Geben Sie dabei nach **jeder** Anwendung einer Transformationsregel den Automaten graphisch an und vereinfachen Sie die Ausdrücke in den Zwischenschritten nicht (Außnahme: Sie dürfen die Vereinfachung $\epsilon\alpha \equiv \alpha\epsilon \equiv \alpha$ anwenden).

Aufgabe 3 **Residualsprachen (12 Punkte)**

Sei $\Sigma := \{a, b\}$ und $L \subseteq \Sigma^*$ eine reguläre Sprache mit

$$\epsilon, b \notin L, \qquad L^a = L^{bb} = L(a^*) \qquad \text{und} \qquad L^{ba} = \emptyset.$$

0 1 2 3

a)* Geben Sie einen regulären Ausdruck für L^b an und begründen Sie die Korrektheit des regulären Ausdrucks. Ihr regulärer Ausdruck darf maximal 5 Zeichen lang sein.
Beispielsweise enthält der Ausdruck abb^* 4 Zeichen und der Ausdruck $abb^* \mid bb$ 7 Zeichen.

L^b :=
Begründung:

0 1 2 3

b) Geben Sie einen regulären Ausdruck für L an und begründen Sie die Korrektheit des regulären Ausdrucks. Ihr regulärer Ausdruck darf maximal 10 Zeichen lang sein.

L :=
Begründung:

0 1 2 3 4

c)* Fakt: Es gibt keine weiteren Residualsprachen neben L, L^a, L^b, L^{ba}.

Entscheiden Sie für die folgenden Sprachen, zu welchen Residualsprachen L, L^a, L^b, L^{ba} sie gleich sind, indem Sie die rechten Seiten der Gleichungen mit L, L^a, L^b oder L^{ba} vervollständigen.

- $L^{aa} =$
- $L^{ab} =$
- $L^{baa} =$
- $L^{bab} =$

0 1 2

d) Zeichnen Sie den kanonischen Minimalautomaten für L. Beschriften Sie die Zustände des Automaten jeweils mit einem regulären Ausdruck für die Residualsprache des jeweiligen Zustands. Je regulären Ausdruck dürfen Sie dabei maximal 10 Zeichen verwenden.

Aufgabe 4 Do You Even Recurse? (10 Punkte)

a)* Sei $P(r)$ das Prädikat, das für einen regulären Ausdruck r angibt, ob alle durch r erzeugten Wörter gerader Länge sind. Formal definieren wir

$$P(r) := \forall w \in L(r).\ \exists n \in \mathbb{N}.\ |w| = 2n.$$

Geben Sie, analog zu den rekursiven Funktionen aus den Übungs- und Hausaufgaben, eine rekursive, berechenbare Funktion ev an, sodass $\mathrm{ev}(r) \iff P(r)$ für jeden regulären Ausdruck r gilt.
Für den Fall der Konkatenation $r_1 r_2$ dürfen Sie zusätzlich die Hilfsfunktionen $\mathrm{empty}(r)$ und $\mathrm{odd}(r)$ verwenden, wobei

$$\mathrm{empty}(r) \iff L(r) = \emptyset \qquad \text{und} \qquad \mathrm{odd}(r) \iff \forall w \in L(r).\ \exists n \in \mathbb{N}.\ |w| = 2n + 1.$$

- $\mathrm{ev}(\emptyset) :=$
- $\mathrm{ev}(\epsilon) :=$
- $\mathrm{ev}(\mathrm{a}) :=$
- $\mathrm{ev}(r_1 \mid r_2) :=$
- $\mathrm{ev}(r^*) :=$
- $\mathrm{ev}(r_1 r_2) :=$

b) Beweisen Sie die Korrektheit Ihrer Funktion mit struktureller Induktion. Genauer: Beweisen Sie per struktureller Induktion über r, dass $\mathrm{ev}(r) \iff P(r)$.
Sie müssen nur die Fälle $\emptyset, \epsilon, a$ und r^* beweisen. Schreiben Sie für jeden Fall explizit die Induktionshypothese(n) auf und kennzeichnen Sie die Anwendung der Induktionshypothesen im Beweis deutlich. Zeigen Sie insbesondere auch, ob $P(\emptyset)$, $P(\epsilon)$, $P(a)$ gilt, indem Sie die Definition von P verwenden.

Aufgabe 5 Kontextfreie Sprachen und Pumping Lemma (11 Punkte)

a)* Zeigen Sie unter Verwendung des Pumpinglemmas, dass folgende Sprache über dem Alphabet $\Sigma := \{a, b\}$ nicht kontextfrei ist: $L := \{a^i b^j a^k \mid i, j, k \in \mathbb{N} \wedge j = \min(i, k)\}$.

0
1
2
3
4
5
6
7

b)* Geben Sie eine kontextfreie Grammatik für die Sprache $L := \{a^i b^j a^k \mid i, j, k \in \mathbb{N} \land j = i + k\}$ über dem Alphabet $\Sigma := \{a, b\}$ an. Ihre Grammatik darf maximal 7 Produktion enthalten.
Beachten Sie: $S \to a \mid b$ ist eine Abkürzung für $S \to a$ und $S \to b$ und enthält somit 2 Produktionen.

0 1 2 3 4

Aufgabe 6 Typ-0 Grammatiken (12 Punkte)

Erinnerung: Eine Typ-0 Grammatik kann sowohl Terminale als auch Nichtterminale auf beiden Seiten Ihrer Produktionen besitzen, d.h. $P \subseteq (V \cup \Sigma)^* \times (V \cup \Sigma)^*$.

a)* Gegeben eine Typ-0 Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$, sei $G' := \left(V \cup \{S'\}, \Sigma, P', S'\right)$, wobei $S' \notin V$ und $P' := P \cup \{S' \to SS\}$.
Geben Sie eine Grammatik G mit $L(G') \neq L(G)L(G)$ und maximal 3 Produktionen an. Begründen Sie die Korrektheit Ihres Beispiels.

0 1 2 3

b)* Geben Sie ein Verfahren an, das als Input eine Typ-0 Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ erhält, und eine Grammatik H mit $L(H) = L(G)L(G)$ und höchstens $3(|\Sigma| + |P|)$ Produktionen konstruiert. Erläutern Sie die Idee Ihres Verfahrens auch informell!

0 1 2 3 4 5 6 7

0
1
2

c) Wenden Sie Ihr Verfahren auf die folgende Grammatik mit Startsymbol S an:

$$S \to XaYa \quad aY \to bc \quad Xb \to cc$$

Aufgabe 7 **Ask Me Anything (10 Punkte)**

Kreuzen Sie richtige Antworten an ☒
Kreuze können durch vollständiges Ausfüllen gestrichen werden ■
Gestrichene Antworten können durch nebenstehende Markierung erneut angekreuzt werden ×■

a)* Sei $f: \Sigma^* \to \Sigma^*$ eine berechenbare, partielle Funktion. Der Graph von f ist die Menge

$$\mathit{Graph}(f) := \{(w, f(w)) \mid w \in \Sigma^*, f(w) \neq \bot\}.$$

Wählen Sie alle wahren Aussagen, die unabhängig von f gelten, aus. Beachten Sie insbesondere, dass beispielsweise jede entscheidbare Menge auch semi-entscheidbar ist.

☐ Das Komplement von *Graph*(f) ist semi-entscheidbar.

☐ *Graph*(f) ist entscheidbar.

☐ *Graph*(f) ist semi-entscheidbar.

b)* Sei $\Sigma := \{a, b\}$ und sei $L \subseteq \Sigma^*$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

☐ Wenn $L^a \in \text{NP}$, dann ist $L \in \text{NP}$.

☐ Wenn $L^a \in \text{NP}$ und $L^b \in \text{NP}$, dann ist $L \in \text{NP}$.

☐ Wenn $L \in \text{NP}$, dann ist $L^a \in \text{NP}$.

c)* Sei Σ ein Alphabet. Sei $\mathcal{K}$ die Menge aller kontextfreien Grammatiken mit Terminalen aus Σ. Gegeben eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$, sei $\min(L)$ die Menge der kürzesten Wörter in L. Welche der folgenden Mengen sind entscheidbar?

☐ $\{(G_1, G_2) \in \mathcal{K} \times \mathcal{K} \mid \min(L(G_1)) \subseteq L(G_2)\}$.

☐ $\{(G_1, G_2) \in \mathcal{K} \times \mathcal{K} \mid L(G_1) \setminus \min(L(G_1)) = L(G_2)\}$.

☐ $\{(G_1, G_2) \in \mathcal{K} \times \mathcal{K} \mid L(G_1) \setminus L(G_2) = \emptyset\}$.

d)* Seien A, B, C Sprachen über demselben Alphabet Σ. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

☐ $A \leq_p B$ genau dann wenn $\overline{A} \leq_p \overline{B}$.

☐ Sei H das (allgemeine) Halteproblem. Wenn $A \in \text{NP}$, dann $A \leq_p H$.

☐ A und B sind entscheidbar genau dann wenn $A \leq B$ und $B \leq A$.

e)* Erinnerung: Eine Familie von Sprachen ist eine Menge von Mengen.
Wählen Sie alle Aussagen, die zutreffen. Beachten Sie insbesondere, dass jede entscheidbare Menge auch semi-entscheidbar ist.

☐ Es gibt eine abzählbar unendliche Familie von entscheidbaren Sprachen $\{L_i\}_{i=1}^{\infty}$ über demselben Alphabet, sodass $\bigcup_{i=1}^{\infty} L_i$ nicht semi-entscheidbar ist.

☐ Es gibt eine abzählbar unendliche Familie von entscheidbaren Sprachen $\{L_i\}_{i=1}^{\infty}$ über demselben Alphabet, sodass $\bigcup_{i=1}^{\infty} L_i$ unentscheidbar ist.

☐ Es gibt eine abzählbar unendliche Familie von entscheidbaren Sprachen $\{L_i\}_{i=1}^{\infty}$ über demselben Alphabet, sodass $\bigcup_{i=1}^{\infty} L_i$ entscheidbar ist.

Aufgabe 8 **Spiel, SAT und Sieg (12 Punkte)**

Eine Klausel (d.h. eine Disjunktion von Literalen) ist

1. *positiv*, falls alle Literale positiv sind,
2. *negativ*, falls alle Literale negativ sind und
3. *gemischt*, sonst.

Beispielsweise ist die Klausel $(x \vee y \vee z)$ positiv, die Klausel $(\neg x \vee \neg z)$ negativ, und die Klausel $(x \vee \neg y)$ gemischt.
Eine Formel in konjunktiver Normalform (KNF) ist *unvermischt* wenn sie keine gemischte Klauseln enthält.
Beispielsweise ist die Formel $(x \vee y) \wedge (\neg x \vee \neg z)$ unvermischt, aber die Formel $(x \vee y) \wedge (x \vee \neg y)$ nicht.
Sei UKNF-SAT die Menge aller Formeln in KNF, die unvermischt und erfüllbar sind.

a) Lösen Sie eine der folgenden beiden Aufgaben:

(i) Geben Sie einen polynomiellen Algorithmus an, der UKNF-SAT entscheidet. Begründen Sie die Korrektheit Ihres Algorithmus.

(ii) Reduzieren Sie KNF-SAT auf UKNF-SAT.

Korrigierte Angabe (am Anfang der Klausur verkündet): Geben Sie eine polynomielle Reduktion von KNF-SAT auf UKNF-SAT an. Beweisen Sie die Korrektheit der Reduktion.

b) Falls Sie einen polynomiellen Algorithmus für UKNF-SAT angegeben haben (Aufgabe (i)), wenden Sie Ihren Algorithmus auf die Formel $F := (x \lor y) \land (\neg x \lor \neg y \lor \neg z) \land \neg v$ Schritt für Schritt an.

Falls Sie hingegen KNF-SAT auf UKNF-SAT reduziert haben (Aufgabe (ii)), wenden Sie Ihre Reduktionsfunktion auf die Formel $F := (x \lor \neg y) \land (x \lor y \lor \neg z) \land \neg v$ an.

0
1
2

Zusätzlicher Platz für Lösungen. Markieren Sie deutlich die Zuordnung zur jeweiligen Teilaufgabe. Vergessen Sie nicht, ungültige Lösungen zu streichen.