



Hinweise zur Personalisierung:

- Ihre Prüfung wird bei der Anwesenheitskontrolle durch Aufkleben eines Codes personalisiert.
- Dieser enthält lediglich eine fortlaufende Nummer, welche auch auf der Anwesenheitsliste neben dem Unterschriftenfeld vermerkt ist.
- Diese wird als Pseudonym verwendet, um eine eindeutige Zuordnung Ihrer Prüfung zu ermöglichen.

Einführung in die Theoretische Informatik

Klausur: IN0011 / Probe

Datum: Montag, 19. Juli 2021

Prüfer: Prof. Dr. Dr. h.c. Javier Esparza

Uhrzeit: 14:00 – 17:00

Bearbeitungshinweise

- Diese Klausur umfasst **26 Seiten** mit insgesamt **9 Aufgaben**.
Bitte kontrollieren Sie jetzt, dass Sie eine vollständige Angabe erhalten haben.
- Die Gesamtpunktzahl in dieser Prüfung beträgt 60 Punkte.
- Dies ist eine (leicht modifizierte) Version der Endterm-Prüfung vom SS2020.
- Sie müssen Ihre Klausur eingescannt bis 17:00:00 online auf TUMExam einreichen:
 - Sie müssen nur die von Ihnen bearbeiteten Seiten **und** das unterschriebene Deckblatt hochladen.
 - Achten Sie darauf, dass sowohl Ihre **Lösungen als auch die Barcodes klar lesbar** sind.
 - In begründeten Fällen (wie z.B. bei technischen Problemen) können Sie der Übungsleitung bis 17:00:00 per Email (theoleitung@in.tum.de) ihre Klausur zukommen lassen, als PDF oder SHA256-Prüfsumme.
- Sie müssen die Klausur alleine bearbeiten. Die Klausur ist open-book (Kofferklausur), allerdings dürfen Sie in keinsten Weise Unterstützung von anderen Personen **erhalten** oder diesen **geben** (in Person, Chat, Foren, Diskussionsgruppen, etc.). Eine solche Unterstützung wird als Unterschleif bewertet und mit den Konsequenzen, wie in der APSO beschrieben, geahndet.
- Sie dürfen jegliche Art von Literatur (auch im Internet) benutzen. Sollten Sie dabei auf Lösungsansätze stoßen, die Sie für die Klausur verwenden möchten, so müssen Sie diese Teile klar und deutlich zitieren (Literaturverweis bzw. Link). Die Lösung selber müssen Sie dennoch weiterhin selbstständig in die Klausur übertragen. Ihnen entsteht durch eine Zitation kein Nachteil.
- Mit * gekennzeichnete Teilaufgaben sind ohne Kenntnis der Lösung vorheriger Teilaufgaben lösbar.
- Sie dürfen Ergebnisse vorheriger Teilaufgaben auch dann verwenden, wenn Sie diese nicht lösen konnten.
- **Es werden nur solche Ergebnisse gewertet, bei denen der Lösungsweg erkennbar ist.** Alle Aufgaben sind **grundsätzlich zu begründen**, sofern es in der jeweiligen Teilaufgabe nicht ausdrücklich anders vermerkt ist.
- Schreiben Sie weder mit roter noch grüner Farbe.
- Die natürlichen Zahlen \mathbb{N} enthalten die 0.

Aufgabe 1 Rekursive Prozedur (8.5 Punkte)

- 0
- 1
- a)* Sei Σ ein Alphabet. Geben Sie die Rekursionsgleichungen für eine rekursive Prozedur $\text{contains}(a, r)$ an, die für einen Buchstaben $a \in \Sigma$ und regulären Ausdruck r berechnet, ob a in jedem Wort aus $L(r)$ vorkommt. Es soll also für alle $w \in L(r)$ gelten, dass $(\exists u, v \in \Sigma^*. w = uav) \Leftrightarrow P(w)$.

$\text{contains}(a, \emptyset) = \text{true}$
 $\text{contains}(a, \epsilon) = \text{false}$
 $\text{contains}(a, x) = (a = x)$
 $\text{contains}(a, r_1|r_2) = \text{contains}(a, r_1) \wedge \text{contains}(a, r_2)$
 $\text{contains}(a, r_1r_2) = \text{contains}(a, r_1) \vee \text{contains}(a, r_2)$
 $\text{contains}(a, r^*) = \text{false}$

- 0
- 1
- 2
- 3
- 4
- 5
- b) Beweisen Sie mit Hilfe von struktureller Induktion, dass ihre Prozedur korrekt ist. Sie dürfen dabei den Konkatenationsfall (d.h. $r = r_1r_2$) weglassen. Kennzeichnen Sie dabei die Induktionshypothesen und deren Anwendungen deutlich.

Fall $r = \emptyset$
Es gilt $\text{contains}(a, \emptyset) = \text{true} \Leftrightarrow \forall w \in L(\emptyset). P(w)$, da $L(\emptyset) = \emptyset$.

Fall $r = \epsilon$
Wir haben $L(r) = \{\epsilon\}$ und $\text{contains}(a, \epsilon) = \text{false} \Leftrightarrow P(\epsilon) \Leftrightarrow \forall w \in L(\epsilon). P(w)$.

Fall $r = x$
Wenn $a = x$, dann gilt $L(x) = \{a\}$ und wir haben $\text{contains}(a, x) = \text{true} \Leftrightarrow P(a) \Leftrightarrow \forall w \in L(x). P(w)$.
Ansonsten haben wir $\text{contains}(a, x) = \text{false} \Leftrightarrow P(x) \Leftrightarrow \forall w \in L(x). P(w)$, da $L(x) = \{x\}$.

Fall $r = r_1|r_2$
Als Induktionshypothesen erhalten wir $\text{contains}(a, r_1) \Leftrightarrow \forall w \in L(r_1). P(w)$ und $\text{contains}(a, r_2) \Leftrightarrow \forall w \in L(r_2). P(w)$. Damit haben wir

$$\begin{aligned} \text{contains}(a, r_1|r_2) &\Leftrightarrow \text{contains}(a, r_1) \wedge \text{contains}(a, r_2) \\ &\stackrel{IH}{\Leftrightarrow} (\forall w \in L(r_1). P(w)) \wedge (\forall w \in L(r_2). P(w)) \\ &\Leftrightarrow \forall w \in L(r_1) \cup L(r_2). P(w) \\ &\Leftrightarrow \forall w \in L(r_1|r_2). P(w). \end{aligned}$$

Fall $r = r_1 r_2$

Als Induktionshypothesen erhalten wir $\text{contains}(a, r_1) \iff \forall w \in L(r_1). P(w)$ und $\text{contains}(a, r_2) \iff \forall w \in L(r_2). P(w)$. Wenn $L(r_1) = \emptyset$ oder $L(r_2) = \emptyset$, dann gilt $L(r_1 r_2) = \emptyset$ und die Korrektheit folgt analog zum Fall $r = \emptyset$. Ansonsten gilt

$$\begin{aligned} \text{contains}(a, r_1 r_2) &\iff \text{contains}(a, r_1) \vee \text{contains}(a, r_2) \\ &\stackrel{\text{IH}}{\iff} (\forall w \in L(r_1). \exists u, v. w = uav) \vee (\forall w \in L(r_2). \exists u, v. w = uav) \\ &\iff (\forall w \in L(r_1 r_2). \exists y \in L(r_2). \exists u, v. w = uavy) \vee \\ &\quad (\forall w \in L(r_1 r_2). \exists y \in L(r_1). \exists u, v. w = yuav) \\ &\iff (\forall w \in L(r_1 r_2). \exists u, v. w = uav) \vee (\forall w \in L(r_1 r_2). \exists u, v. w = uav) \\ &\iff \forall w \in L(r_1 r_2). \exists u, v. w = uav \end{aligned}$$

Dabei gilt die dritte Äquivalenz aufgrund der Annahmen $L(r_1) \neq \emptyset$ und $L(r_2) \neq \emptyset$.

Fall $r = s^*$

Dann gilt $\epsilon \in L(s^*)$ und da $P(\epsilon) = \text{false}$, ist die Definition $\text{contains}(a, r^*) = \text{false}$ korrekt.

0 c)* Angenommen wir erweitern die regulären Ausdrücke mit einem weiteren Konstruktor \cap , wobei wir $L(r_1 \cap r_2) := L(r_1) \cap L(r_2)$ definieren. Zeigen Sie mit Induktion oder widerlegen Sie, dass die Rekursionsgleichung $\text{contains}(a, r_1 \cap r_2) = \text{contains}(a, r_1) \wedge \text{contains}(a, r_2)$ korrekt ist.

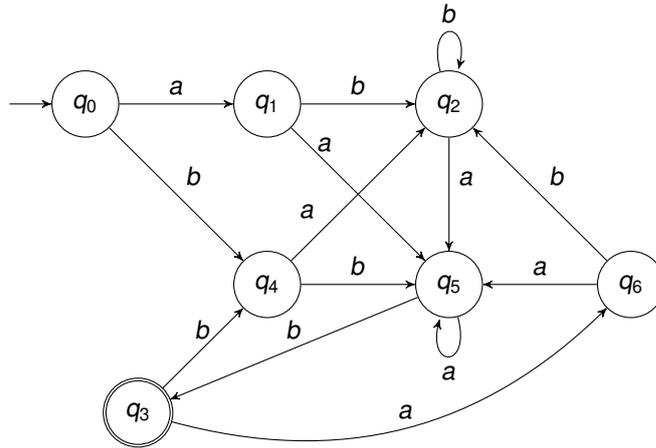
1

2

Die Rekursionsgleichung ist inkorrekt. Sei $r_1 = b$ und $r_2 = c$. Dann gilt $\text{contains}(a, r_1) = \text{contains}(a, r_2) = \mathbf{false}$ und $L(r_1) \cap L(r_2) = \emptyset$. Wir haben einerseits $\forall w \in \emptyset. P(w) \iff \forall w \in L(r_1 \cap r_2). P(w)$ aber andererseits $\text{contains}(a, r_1 \cap r_2) = \mathbf{false}$.

Aufgabe 2 Myhill-Nerode-Äquivalenzklassen (9 Punkte)

Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Wir betrachten den folgenden DFA M :



a)* Minimieren Sie den gegebenen DFA M . Geben Sie dazu die vollständige Minimierungstabelle nach Vorlesungsalgorithmus an und zeichnen Sie den resultierenden DFA.

b) Geben Sie für jeden Zustand des minimalen Automaten das Wort aus der entsprechenden Myhill-Nerode-Äquivalenzklasse an, welches das kleinste im Hinblick auf die lexikographische Ordnung \prec ist (wobei $\epsilon \prec a \prec b \prec aa \prec ab \prec \dots$), d.h. kürzere vor längeren Wörtern und punktweise a vor b .

c)* Sei n die Anzahl der Zustände des von Ihnen in Teilaufgabe a) konstruierten Automaten. Zeigen oder widerlegen Sie jeweils: Es gibt einen DFA M' mit n Zuständen, $L(M) = L(M')$ und M' besitzt

1. keine Schleife.
2. mindestens eine Schleife.

Als Schleife bezeichnen wir dabei Übergänge der Form $\delta(q, x) = q$.

Lösungsbox Aufgabe 2 (Teilaufgabe bitte klar kennzeichnen)

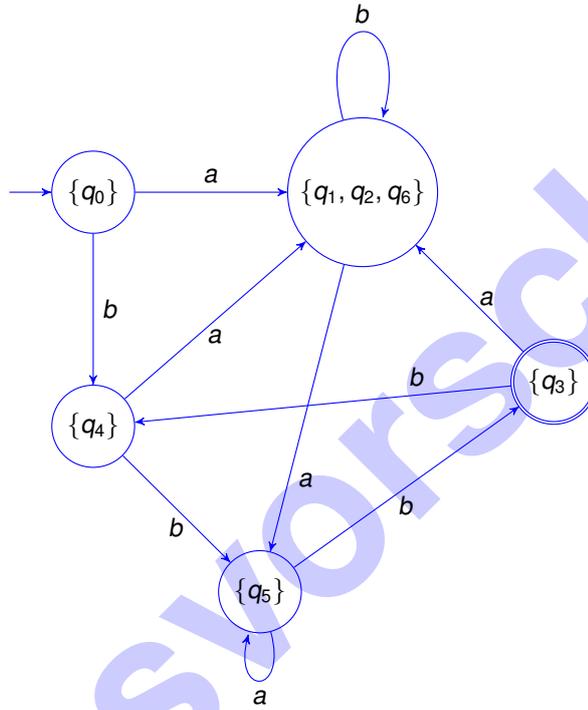
| |
|---|
| 0 |
| 1 |
| 2 |
| 3 |
| 4 |
| 5 |
| 6 |

| |
|---|
| 0 |
| 1 |

| |
|---|
| 0 |
| 1 |
| 2 |

Lösungsbox Aufgabe 2 a)

| | q_0 | q_1 | q_2 | q_3 | q_4 | q_5 | q_6 |
|-------|------------|------------|------------|------------|-------|-------|-------|
| q_0 | — | — | — | — | — | — | — |
| q_1 | ab | — | — | — | — | — | — |
| q_2 | ab | $=$ | — | — | — | — | — |
| q_3 | ϵ | ϵ | ϵ | — | — | — | — |
| q_4 | bb | ab | ab | ϵ | — | — | — |
| q_5 | b | b | b | ϵ | b | — | — |
| q_6 | ab | $=$ | $=$ | ϵ | ab | b | — |



Lösungsbox Aufgabe 2 b)

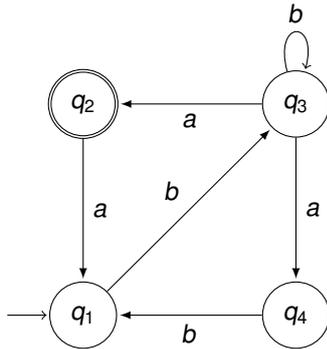
$\{q_0\} : [\epsilon]$
 $\{q_1, q_2, q_6\} : [a]$
 $\{q_3\} : [aab]$
 $\{q_4\} : [b]$
 $\{q_5\} : [aa]$

Lösungsbox Aufgabe 2 c)

Da der oben konstruierte Automat minimal ist, muss jeder Automat mit gleich vielen Zuständen ebenfalls minimal sein. Weiterhin sind nach Vorlesung alle minimalen Automaten bis auf Umbenennung der Zustände gleich. Deshalb muss M genauso viele Schleifen, wie der oben konstruierte Automat enthalten. Damit folgt, dass M mindestens eine Schleife enthalten muss. Es ist also nicht möglich, dass M keine Schleife enthält.

Aufgabe 3 NFA → RegEx (7 Punkte)

Gegeben sei folgender Automat $M = (\{q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{a, b\}, \delta, q_1, \{q_2\})$:



a)* Berechnen Sie einen regulären Ausdruck α mit $L(\alpha) = L(M)$. Verwenden Sie dafür das aus der Vorlesung bekannte Verfahren zum Lösen eines Gleichungssystems mit Hilfe von Ardens Lemma.

- 0
- 1
- 2
- 3
- 4
- 5

Gleichungssystem:

$$X_1 \equiv bX_3 \tag{3.1}$$

$$X_2 \equiv aX_1 \mid \epsilon \tag{3.2}$$

$$X_3 \equiv aX_2 \mid bX_3 \mid aX_4 \tag{3.3}$$

$$X_4 \equiv bX_1 \tag{3.4}$$

Gleichung (3.1) in (3.2) und (3.4) einsetzen:

$$X_2 \equiv abX_3 \mid \epsilon \tag{3.5}$$

$$X_4 \equiv bbX_3 \tag{3.6}$$

Gleichung (3.5) und (3.6) in (3.3) einsetzen und auflösen:

$$X_3 \equiv a(abX_3 \mid \epsilon) \mid bX_3 \mid abbX_3 \equiv (aab \mid b \mid abb)X_3 \mid a \tag{3.7}$$

$$\equiv (aab \mid b \mid abb)^*a \tag{3.8}$$

Einsetzen in (3.1):

$$X_1 \equiv \alpha \equiv b(aab \mid b \mid abb)^*a \tag{3.9}$$

- 0
- 1
- 2

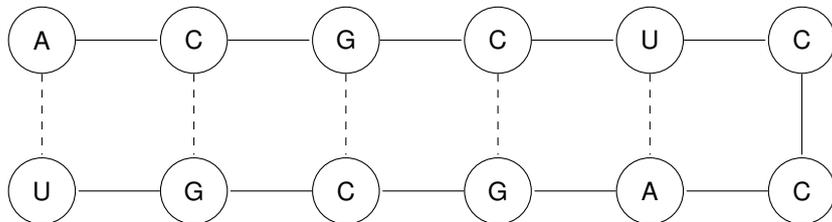
b)* Folgt aus der Gleichung $X \equiv (aa \mid \epsilon)X \mid a$ dass $X \equiv (aa \mid \epsilon)^*a$?
Beweisen Sie die Implikation oder geben Sie ein Gegenbeispiel an (mit kurzer Begründung).

Gegenbeispiel: $X = a^*$ ist eine Lösung von $X \equiv (aa \mid \epsilon)X \mid a$ aber $a^* \not\equiv (aa \mid \epsilon)^*a$

Aufgabe 4 Pumping Lemma (7.5 Punkte)

a)* Ein RNA-Strang ist eine Kette von Nukleotiden, von denen es vier verschiedene, repräsentiert durch die Buchstaben A, C, G und U gibt. Wir betrachten einen RNA-Strang also als ein Wort über dem Alphabet $\Sigma = \{A, C, G, U\}$.

Dabei sind die Nukleotide A und U, sowie G und C, komplementär zueinander, was bedeutet, dass sie eine Verbindung eingehen können. Wir nennen zwei Wörter w und w' komplementär, wenn sie zeichenweise komplementär sind. Genauer gesagt muss $|w| = |w'|$ gelten und für jedes i mit $0 \leq i \leq |w|$ gelten, dass w_i komplementär zu w'_i ist. Ein RNA-Strang kann eine sogenannte Haarnadel Struktur bilden, wenn er sich in der Mitte in zwei komplementäre Teile falten lässt. Hier ein Beispiel für den Strang ACGCUCCAGCGU:



Wie Sie am Beispiel erkennen können, müssen die zwei Nukleotide genau in der Mitte des Strangs dabei nicht komplementär zueinander sein.

Formal definieren wir die Sprache der RNA-Stränge die eine Haarnadel bilden können als:

$$L = \{uxyv \mid x, y \in \Sigma, u, v \in \Sigma^+, u \text{ ist komplementär zu } v^R\}$$

Zeigen Sie, dass diese Sprache nicht regulär ist, indem Sie einen Widerspruchsbeweis mit Hilfe des Pumping Lemmas führen.

b)* Sei $r = 1^*011^*$ ein regulärer Ausdruck über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$. Finden Sie die kleinste Zahl k , die eine Pumping Lemma Zahl (Bezogen auf das Pumping Lemma für reguläre Sprachen) für $L(r)$ ist. Begründen Sie Ihre Aussage formal.

Lösungsbox Aufgabe 4 (Teilaufgabe bitte klar kennzeichnen)

- a)
- Angenommen, L wäre regulär. Dann können wir das PL für reguläre Sprachen anwenden.
 - Sei $n \in \mathbb{N}_+$ eine PL-Zahl für L .
 - Wähle $z = A^nCCU^n$. Es gilt $|z| \geq n$ und $z \in L$.
 - Nach PL gibt es eine Zerlegung $z = uvw$ mit 1. $v \neq \epsilon$, 2. $|uv| \leq n$ und 3. $\forall i \in \mathbb{N}. uv^i w \in L$.
 - Aufgrund von 2. muss v von der Form A^k sein. Damit müsste wegen 3. gelten dass $uv^0w = uw = A^{n-k}CCU^n \in L$. Wegen 1. gilt aber $k > 0$, und damit ist mindestens eines der C im Teil des Wortes vor der Faltkante. (u in der Definition von L) Dann müsste es aber im letzten Teil des Wortes ein komplementäres G geben, was aber nicht der Fall ist. Damit folgt $uv^0w \notin L$.
 - Also haben wir für einen Widerspruch zur Annahme hergeleitet und somit ist L nicht regulär.

Lösungsvorschlag

b) Die PL Zahl muss größer als 2 sein, da $01 \in L < r >$ und man durch pumpen auf $i = 0$ immer ein Wort erhält das kürzer als zwei Zeichen ist, und somit nicht in der Sprache liegen kann.
3 ist eine PL-Zahl:

- z ist von der Form $1^k 011^l$ wobei $k > 0$ oder $l > 0$
- $k > 0$: $u = \epsilon$, $v = 1$, $w = 1^{k-1} 011^l$.
 $k = 0$, aber $l > 0$: $u = 01$, $v = 1$, $w = 1^{l-1}$.
- Dann gilt offensichtlich $v \neq \epsilon$ und $|uv| \leq 3$
- Im ersten Fall gilt außerdem: $uv^i w = 1^{k+i} 011^l \in L(1^* 011^*)$
Im zweiten Fall: $uv^i w = 011^{l+i} \in L(1^* 011^*)$

Alternativ kann man die Aufgabe lösen, indem man einen Automaten aufstellt der die Sprache akzeptiert und zeigt dass er minimal ist.

Aufgabe 5 Harper Lee (7 Punkte)

Gegeben sei die kontextfreie Grammatik G über dem Alphabet $\Sigma := \{0, 1\}$ mit Startsymbol Z und Produktionen $Z \rightarrow 10 \mid ZZ \mid 01$.

0
1
2
3
4

a)* Zeigen Sie $L(G) \subseteq \{w \in \Sigma^+ \mid |w|_1 = |w|_0\} =: L$ formell per Induktion über die Erzeugung von Wörtern $w \in L(G)$. Erinnerung: $|w|_a$ bezeichnet die Anzahl der Vorkommnisse von $a \in \Sigma$ in w .

b)* Zeigen oder widerlegen Sie $L = L(G)$ formell.

Lösungsbox Aufgabe 5 a)

1. Basisfälle: Es gilt offensichtlich $00, 10 \in L$.
2. Im Fall $Z \rightarrow ZZ$ erhalten wir per IH $u, v \in L$ mit $Z \rightarrow ZZ \rightarrow^* uv$. Da $u \in L$ gilt $u \neq \epsilon$ und somit $uv \neq \epsilon$. Da $u, v \in L$ gilt $|u|_0 = |u|_1$ und $|v|_0 = |v|_1$ und somit $|uv|_0 = |u|_0 + |v|_0 = |u|_1 + |v|_1 = |uv|_1$. Damit folgt $uv \in L$.

0
1
2
3

Lösungsbox Aufgabe 5 b)

Wir zeigen $L \neq L(G)$. Setze $w := 0011 \in L$. Angenommen $w \in L(G)$. Da $|w| > 2$ gilt $Z \rightarrow ZZ \rightarrow^* w = uv$ mit $u, v \in L(G) \subseteq L$. Für jedes $x \in L$ gilt $0 \neq |x| = |x|_0 + |x|_1 = 2|x|_0$. Da $u, v \in L$ folgt somit $|u|, |v| \in 2\mathbb{N}_+$ und damit $u = 00$ und $v = 11$. Aber $u = 00 \notin L$, Widerspruch!

Aufgabe 6 Primitive Rekursion (3 Punkte)

Im SS21 haben wir *primitive Rekursion* nicht besprochen.
Somit ist diese Aufgabe im SS21 auch nicht relevant.

Zeigen Sie, dass die folgende Funktion $test : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ primitiv rekursiv ist:

$test(n)$ = die niederwertigste Ziffer der Binärdarstellung von n

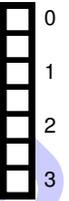
wobei die Binärziffern 0 und 1 als natürliche Zahlen interpretiert werden.

Sie dürfen bei der Definition von $test$ das erweiterte Schema der primitiven Rekursion benutzen. Als Hilfsfunktionen sind nur zugelassen: Konstanten (0, 1, 2, ...), und höchstens eine weitere einstellige, ebenfalls mit dem erweiterten Schema der primitiven Rekursion definierte Funktion. Sie dürfen keine weiteren Hilfsfunktionen definieren oder benutzen.

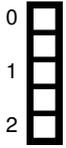
Die Korrektheit Ihrer Konstruktion müssen Sie nicht beweisen.

Lösungsbox Aufgabe 6

$$\begin{aligned} test(0) &= 0 \\ test(n+1) &= neg(test(n)) \\ \\ neg(0) &= 1 \\ neg(n+1) &= 0 \end{aligned}$$



Aufgabe 7 PCP (2 Punkte)



Konstruieren Sie eine PCP Instanz I über dem Alphabet $\{0, 1\}$ sodass:

- I enthält genau 3 verschiedene Paare,
- $(10, 01) \in I$, und
- I hat eine Lösung i_1, i_2, i_3 , aber keine kürzere Lösung.

Die Korrektheit ihrer Konstruktion müssen Sie nicht beweisen.

Lösungsbox Aufgabe 7

Eine mögliche Lösung:

$$I = \{(0, 010), (10, 01), (011, 1)\}$$

Aufgabe 8 Picasso (9 Punkte)

Ein *Malomat* M ist ähnlich zu einer deterministischen Turingmaschine, besitzt allerdings anstatt eines unendlich langen, eindimensionalen Bandes eine unendlich große, zweidimensionale Leinwand und kann sich zusätzlich auf und ab bewegen. Formal ist ein Malomat ein 4-Tupel (Q, Γ, δ, q_0) , wobei

1. $Q \neq \emptyset$ die endliche Zustandsmenge,
2. $\Gamma \neq \emptyset$ die endliche Farbpalette,
3. $\delta : Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{\uparrow, \rightarrow, \downarrow, \leftarrow, N\}$ die Übergangsfunktion und
4. $q_0 \in Q$ der Startzustand ist.

Analog zu deterministischen Turingmaschinen können Malomaten auch graphisch als gelabelte Graphen dargestellt werden (siehe Beispiel unten).

Ein Malomat erhält als Eingabe eine voreingefärbte Leinwand. Diese lässt sich durch eine Funktion $f : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \Gamma$ darstellen. Eine Konfiguration eines Malomats ist dann ein Tripel (q, p, f) , wobei $q \in Q$ der aktuelle Zustand, $p \in \mathbb{Z}^2$ die aktuelle Position (des Kopfs/Pinsels) und $f : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \Gamma$ die aktuelle Leinwand ist. Die Übergangsrelation \rightarrow_M ist dann wie folgt definiert: Falls $\delta(q, f(x, y)) = (q', c, D)$, dann

$$(q, (x, y), f) \rightarrow_M \begin{cases} (q', (x, y + 1), f'), & \text{falls } D = \uparrow \\ (q', (x + 1, y), f'), & \text{falls } D = \rightarrow \\ (q', (x, y - 1), f'), & \text{falls } D = \downarrow \\ (q', (x - 1, y), f'), & \text{falls } D = \leftarrow \\ (q', (x, y), f'), & \text{falls } D = N \end{cases}$$

wobei

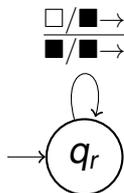
$$f'(x', y') := \begin{cases} c, & \text{falls } x = x' \text{ und } y = y' \\ f(x', y'), & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Initialposition eines Malomats ist dabei stets der Ursprung $(0, 0) \in \mathbb{Z}^2$. Beachten Sie: Malomaten sind fleißige Maler – sie halten formal gesehen nämlich nie.

Betrachten Sie nun die Farbpalette $\Gamma := \{\square, \blacksquare\}$ (weiß und schwarz) und die weiße Eingabeleinwand $f_w : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \Gamma, (x, y) \mapsto \square$. Wir sagen ein *Malomat* M malt ein *Gemälde* $G \subseteq \mathbb{Z}^2$ falls M mit Farbpalette Γ bei Eingabe f_w

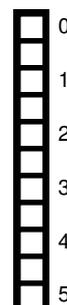
1. jede beliebige, fixierte Position $(x, y) \in G$ nach endlich vielen Schritten schwarz einfärbt,
2. keine schwarz eingefärbte Position jemals weiß übermalt und
3. keine Position $(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \setminus G$ jemals schwarz einfärbt.

Beispiel: Der folgende Malomat malt das Gemälde $\mathbb{N} \times \{0\}$.

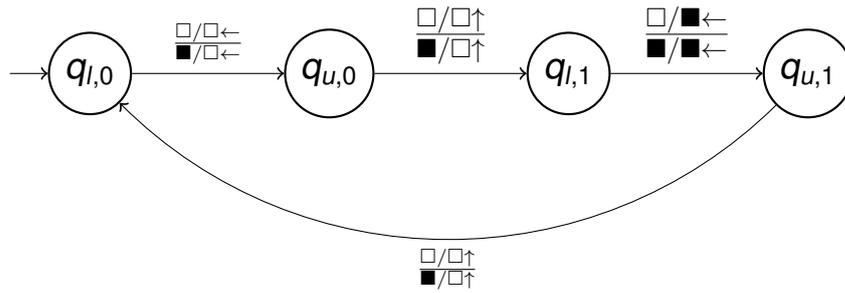


a)* Geben Sie einen Malomat *graphisch* an, der das Gemälde $G_1 := \{(-n, n) \mid n \in \mathbb{N} \text{ und } n \text{ ist ungerade}\}$ malt. Ihr Malomat darf *maximal 5 Zustände* benutzen. Beschreiben Sie ihre Idee dabei auch informell aber vollständig! Die Korrektheit Ihrer Konstruktion müssen Sie nicht beweisen.

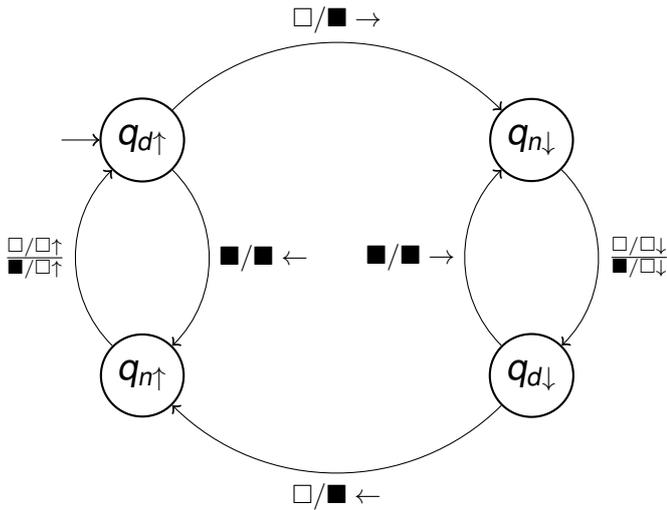
b)* Geben Sie einen Malomat *graphisch* an, der das Gemälde $G_2 := \{(-i, i) \mid i \in \mathbb{Z}\}$ malt. Ihr Malomat darf *maximal 6 Zustände* benutzen. Beschreiben Sie ihre Idee dabei auch informell aber vollständig! Die Korrektheit Ihrer Konstruktion müssen Sie nicht beweisen.



Lösungsbox Aufgabe 8 a)



Idee: Es soll die Diagonale nach oben links mit ungeraden Koordinaten gemalt werden. Zunächst muss der Pinsel auf Position $(-1, 1)$ bewegt werden (links, rauf). Dann wird die Position $(-1, 1)$ schwarz gefärbt und der Pinsel erneut zwei Position zu $(-2, 2)$ (links, rauf) bewegt. Anschließend kann der Vorgang von neuem gestartet werden.



Idee: Es soll die Diagonale nach unten rechts und oben links gemalt werden. Wir wandern abwechselnd die bereits gemalte Diagonale nach ganz oben und nach ganz unten und fügen dabei jeweils ein Kästchen am Ende hinzu. Im Zustand $q_{d\uparrow}$ befinden wir uns auf der Diagonalen und wandern aktuell hoch. Sehen wir ein weißes Kästchen, so bemalen wir es und wechseln in den Wandermodus nach unten. Ansonsten wechseln wir in den Zustand $q_{n\uparrow}$ und wandern einen Schritt nach links. Im Zustand $q_{n\uparrow}$ befinden wir uns nicht auf der Diagonalen und wandern aktuell hoch. Wir bewegen uns einen Schritt nach oben, um zum nächsten Kästchen auf der Diagonalen zu gelangen und wechseln zurück in $q_{d\uparrow}$. Die Zustände $q_{d\downarrow}$ und $q_{n\downarrow}$ verhalten sich analog, nur wandern wir dabei die Diagonale nach unten.

Aufgabe 9 NP-Reduktion (7 Punkte)

Wir betrachten ein Entscheidungsproblem, in dem es darum geht, einen Studienplan zusammenzustellen. Dabei müssen n Fachbereiche (durchnummeriert als $1, \dots, n$) abgedeckt werden. Wir können aus m Fächern ($1, \dots, m$) auswählen, wobei jedes Fach einer gewissen Teilmenge der Fachbereiche zugeordnet ist. Um dies darzustellen gibt es für jedes Fach i eine Menge $B_i \subseteq \{1, \dots, n\}$, die genau die Fachbereiche enthält, denen das Fach zugeordnet ist. Um einen validen Studienplan zu bilden, sollten wir für jeden Fachbereich mindestens ein Fach belegt haben, das diesem zugeordnet ist. Wir dürfen insgesamt maximal $k \leq m$ Fächer belegen.

Formal sieht das Problem also so aus:

Problem STUDIUM

Gegeben: $n, m \in \mathbb{N}$, Mengen B_1, \dots, B_m mit $B_i \subseteq \{1, \dots, n\}$. Ein $k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq m$.

Zu entscheiden: Gibt es eine Teilmenge $F \subseteq \{1, \dots, m\}$ mit $|F| \leq k$, sodass $\forall x \in \{1, \dots, n\}. \exists y \in F. x \in B_y$.

- 0
- 1
- 0
- 1
- 2
- 3
- 4
- 5
- 6
- a)* Zeigen Sie, dass STUDIUM \in NP.
- b)* Zeigen Sie, dass STUDIUM NP-schwer ist, indem Sie eine Reduktion von MENGENÜBERDECKUNG (Siehe Vorlesung Folie 400) angeben und deren Korrektheit formal beweisen.

Lösungsbox Aufgabe 9 (Teilaufgabe bitte klar kennzeichnen)

a) Die Menge der gewählten Fächer F stellt ein in polynomieller Zeit verifizierbares Zertifikat dar. Ist die Kardinalität der Menge größer als k , kann man sofort ablehnen. Ansonsten wird für jeden Fachbereich geprüft, ob ein Fach i im Zertifikat diesen in ihrer Menge B_i abdeckt.

b) Sei eine Menge $M = \{e_1, \dots, e_n\}$ mit $T_1, \dots, T_m \subseteq M$ und $k' \leq n$ gegeben.

Wir bilden diese Instanz wie folgt auf eine Instanz von STUDIUM ab:

- Erstelle n Fachbereiche und m Fächer
- Für eine Teilmenge $T_i = \{e_{i_1}, \dots, e_{i_j}\}$, setze $B_i := \{i_1, \dots, i_j\}$.
- Setze $k := k'$

Die Eingabe wird hier lediglich kopiert bzw. umbenannt, die Reduktion ist also total und in polynomieller Zeit berechenbar.

Korrektheit:

(\Rightarrow) Sei i_1, \dots, i_k eine Lösung des Mengenüberdeckungsproblems. Per Definition gilt dann $M = \bigcup_{i=1}^k T_i$. Daraus folgt $\forall x \in M. \exists y \in \{i_1, \dots, i_k\}. x \in T_y$ und mit der Definition der P_i dass $\forall x \in \{1, \dots, n\}. \exists y \in \{i_1, \dots, i_k\}. x \in P_y$. Damit ist $F = \{i_1, \dots, i_k\}$ eine gültige Lösung für das entsprechende STUDIUM Problem.

(\Leftarrow) Sei F eine Menge von Fächern mit $|F| \leq k$, sodass jeder Fachbereich von einem Fach in F abgedeckt wird. Durch unsere Konstruktion heißt dies insbesondere, dass jedes i mit $1 \leq i \leq n$ von einem Fach $j \in F$ abgedeckt wird. Daraus folgt, dass $e_i \in B_j$ ist. Somit ist $\bigcup_{i \in F} B_i$ eine Mengenüberdeckung mit Kardinalität höchstens k . Wir können diese noch auf genau k Elemente auffüllen, indem wir beliebige weitere B_i hinzufügen.

Lösungsbox Aufgabe 9 a)

Lösungsbox Aufgabe 9 b)

Lösungsvorschlag

Lösungsvorschlag

Zusätzlicher Platz für Lösungen. Markieren Sie deutlich die Zuordnung zur jeweiligen Teilaufgabe. Vergessen Sie nicht, ungültige Lösungen zu streichen.

A large grid area for writing solutions, consisting of a 20x20 grid of small squares. A diagonal watermark reading "Lösungsvorschlag" is overlaid on the grid in a light blue color.

Lösungsvorschlag



Lösungsvorschlag

Zusätzlicher Platz für Lösungen. Markieren Sie deutlich die Zuordnung zur jeweiligen Teilaufgabe. Vergessen Sie nicht, ungültige Lösungen zu streichen.

The image shows a large grid area for solutions. The grid is composed of small squares. A diagonal watermark reading "Lösungsvorschlag" is overlaid on the grid. The watermark is in a light blue color and is oriented diagonally from the bottom-left to the top-right.

Lösungsvorschlag