

Einführung in die Theoretische Informatik

Sommersemester 2024 – Übungsblatt 13

- Dieses Übungsblatt besteht aus einer Auswahl von (Klausur)aufgaben aus vorherigen Jahren und beinhaltet keinen neuen Stoff. Verwenden Sie die letzte Übung für allgemeine Fragen zum Vorlesungsstoff in Hinblick auf die Klausurvorbereitung. (siehe Aufgabe Ü13.1)
- Das Übungsblatt ist in zwei Teile gegliedert: den Vorbereitungsteil, den Sie vor der Übung selbstständig bearbeiten sollen, und den Übungs-/Nachbereitungsteil, der Aufgaben enthält, die in der Übung besprochen werden und von Ihnen anschließend zur Nachbereitung verwendet werden können.

Vorbereitung (vor der Übung selbständig zu bearbeiten)

Vorbereitungsaufgabe Ü13.1. (letztes Tutorium \Rightarrow stellt eure Fragen)

Diese Woche findet die letzte Übung statt. Bitte lassen Sie deshalb Ihrem Tutor rechtzeitig (also so früh wie möglich) Fragen auf Zulip zukommen, die sie noch haben. Z.B. könnten das allgemeine Fragen zu Konzepten wie *Reduktion* oder Techniken wie *Pumping Lemma* sein oder aber auch Fragen zu Übungsaufgaben oder Hausaufgaben, die Sie gerne besprechen würden. Bitte geben Sie in solchen Fällen immer das Kürzel der Aufgabe UND die konkrete Frage an.

Bitte geben Sie Ihrem Tutor genügend Zeit, sich auf die Fragen vorzubereiten. Falls Ihr Tutor es nicht mehr schaffen sollte, sich vorzubereiten, oder Sie nach dem letzten Tutorium noch Fragen haben, finden Sie natürlich auf Zulip noch Unterstützung.

Vorbereitungsaufgabe Ü13.2. (Wichtige Begriffe)

Überprüfen Sie, dass Sie die folgenden Begriffe oder Notationen korrekt definieren können.

- Satz von Cook-Levin
- Die Probleme 2KNF-SAT, COL, MENGENÜBERDECKUNG, CLIQUE, RUCKSACK, TSP, BIN PACKING, PARTITION

Vorbereitungsaufgabe Ü13.3. (*P-Reduktion*)

Zeigen Sie $2COL \in P$ indem Sie $2COL \leq_P 2KNF-SAT$ zeigen.

Übung und Nachbereitung

Bestimmen Sie für jede der folgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist. Falls die Aussage wahr ist, geben Sie eine kurze Begründung an. Andernfalls widerlegen Sie die Aussage, gegebenenfalls mit einem geeigneten Gegenbeispiel und Begründung, dass das Gegenbeispiel korrekt ist.

Übungsaufgabe Ü13.4. (*Quiz*)

- (a) **Aussage:** Für alle Sprachen A, B, C gilt $(A \setminus C)B = AB \setminus CB$.
- (b) **Aussage:** Wenn $L \subseteq \Sigma^*$ regulär ist und $a \in \Sigma$, dann ist die Sprache aller Wörter aus L , die nicht mit a enden, regulär.
- (c) Definition: Analog zu rechtslinearen Grammatiken ist eine Grammatik G *linkslinear*, wenn jede Produktion von G die Gestalt $X \rightarrow Ya$ oder $X \rightarrow a$ hat.

Aussage: Die Sprache $L(G)$ einer linkslinearen Grammatik G ist regulär.

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass reguläre Sprachen unter Spiegelung abgeschlossen sind, d.h. für jede reguläre Sprache L ist auch L^R regulär.

- (d) **Aussage:** Wenn die Sprache einer kontextfreien Grammatik regulär ist, dann ist die Grammatik nicht mehrdeutig.
- (e) **Aussage:** Wenn $A, B \subseteq \Sigma^*$ kontextfrei sind und $\varepsilon \notin A$, dann sind alle Lösungen der Gleichung $X = AX \cup B$ kontextfrei.

Sie dürfen das folgende Theorem für diese Aufgabe verwenden: Für alle Sprachen $X, A, B \subseteq \Sigma^*$ mit $\varepsilon \notin A$ gilt: $X = AX \cup B \implies X = A^*B$.

Übungsaufgabe Ü13.5. (Kontextfreie Sprachen)

Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$.

- (a) Geben Sie für die Sprache $L = \{(aba)^n b^m (ba)^n b\}$ eine kontextfreie Grammatik G an, sodass $L(G) = L$ gilt.
- (b) Sei $G = (\{S\}, \Sigma, \{S \rightarrow \varepsilon \mid aSc \mid aSbSc\}, S)$ eine kontextfreie Grammatik. Zeigen Sie, dass für alle in G ableitbaren Wörter w die Eigenschaft $|w|_a = |w|_c$ gilt.

Übungsaufgabe Ü13.6. (Pumping Lemma)

Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$. Zeigen Sie, dass die Sprache $L = \{wc^n w^R \mid w \in \{a, b\}^n \wedge n \in \mathbb{N}_0\}$ nicht kontextfrei ist. Führen Sie einen Widerspruchsbeweis unter Verwendung des Pumping Lemmas für kontextfreie Sprachen.

Übungsaufgabe Ü13.7. (Entscheidbarkeit)

Betrachten Sie die Menge $A = \{w \in \{0, 1\}^* \mid |L(M_w)| \leq 42\}$.

- (a) Beweisen Sie, dass die Menge nicht semi-entscheidbar ist, indem Sie $\overline{H_0} \leq A$ zeigen.
- (b) Geben Sie einen Semientscheidungsalgorithmus für \overline{A} an.

Übungsaufgabe Ü13.8. (REJECT)

Mit REJECT bezeichnen wir folgendes Problem:

- **Input:** Ein ϵ -NFA N mit n Zuständen über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$ und eine Zahl $m \leq n$.
- **Frage:** Gibt es ein Wort der Länge m das von N nicht akzeptiert wird?

In Mengenschreibweise:

REJECT := $\{(N, m) \mid N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F) \text{ ist } \epsilon\text{-NFA und } m \leq |Q| \text{ und } \Sigma^m \setminus L(N) \neq \emptyset\}$

- (a) Zeigen Sie, dass REJECT NP-vollständig ist. Verwenden Sie hierbei eine geeignete Reduktion von 3-KNF-SAT auf REJECT.
- (b) Wenden Sie Ihre Reduktion auf $(x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3)$ an. Geben Sie den konstruierten ϵ -NFA graphisch an.

Hinweis: Betrachten Sie die Menge aller nichterfüllenden Belegungen für die Formel F , die genau m Variablen hat, als Wörter der Länge m .