Prof. Javier Esparza
Philipp Czerner, Kevin Kappelmann, Valentin Krasotin

Technische Universität München
Lehrstuhl für Theoretische Informatik

Einführung in die Theoretische Informatik

Sommersemester 2024 – Übungsblatt 11

- Das Übungsblatt ist in zwei Teile gegliedert: den Vorbereitungsteil, den Sie vor der Übung selbstständig bearbeiten sollen, und den Übungs-/Nachbereitungsteil, der Aufgaben enthält, die in der Übung besprochen werden und von Ihnen anschließend zur Nachbereitung verwendet werden können.

Vorbereitung (vor der Übung selbständig zu bearbeiten)

Vorbereitungsaufgabe Ü11.1. (*Wichtige Begriffe*)

Überprüfen Sie, dass Sie die folgenden Begriffe oder Notationen korrekt definieren können.

- semi-entscheidbar
- rekursiv aufzählbar
- Satz von Rice
- Postsches Korrespondenzproblem (PCP)

Übung und Nachbereitung

Übungsaufgabe Ü11.2. (*All will be 1*)

Sei $\Sigma := \{a\}$ ein *unäres* Alphabet.

(a) Welche der folgenden PCP Instanzen ist erfüllbar?

(1) $\binom{aaaa}{a}, \binom{aa}{aaa}$

(2) $\binom{aa}{a}, \binom{aaa}{aa}$

(b) Zeigen Sie, dass a-PCP (also PCP auf dem Alphabat $\Sigma = \{a\}$) entscheidbar ist.

Übungsaufgabe Ü11.3. (*Chomsky Lebt*)

In der Vorlesung haben wir, beispielsweise, folgende Probleme für kontextfreie Grammatiken G_1, G_2 über einem Alphabet Σ kennengelernt:

$\langle 1 \rangle$ Ist $L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$?

$\langle 2 \rangle$ Ist $|L(G_1) \cap L(G_2)| < \infty$?

$\langle 3 \rangle$ Ist $L(G_1) \subseteq L(G_2)$?

$\langle 4 \rangle$ Ist $L(G_1) = L(G_2)$?

Von $\langle 1 \rangle$ wurde in der Vorlesung gezeigt, dass es unentscheidbar ist. Zeigen Sie nun:

(a) $\langle 3 \rangle \le \langle 4 \rangle$

(b) $\langle 1 \rangle \le \langle 2 \rangle$

Zur Vereinfachung dürfen Sie $\Sigma = \{a, b\}$ für das zu reduzierende Problem annehmen.

Übungsaufgabe Ü11.4. (*Ein Sack Rice*)

Sei $\Sigma := \{0, 1\}$. Entscheiden Sie für (a–d), ob die folgenden Mengen unentscheidbar sind und begründen Sie Ihre Antworten mit dem Satz von Rice (falls anwendbar). Geben Sie dabei die Menge $\mathcal{F}$ genau an und argumentieren Sie, warum die Menge nicht trivial ist (d.h. weder alle berechenbare Funktionen enthält noch leer ist).

(a) $L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid \{u \in \Sigma^* \mid \varphi_w(u) = 1\} \text{ ist regulär}\}$

(b) $L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid \forall n \in \mathbb{N} : \ \varphi_w(n) = n \cdot (n + 23) + 42\}$

(c) $L_3 = \{w \in \Sigma^* \mid \forall x \in \mathbb{N} : \varphi_w(x) \neq |w|\}$

(d) $L_4 = \{w \in \Sigma^* \mid \forall p \in \mathbb{N}. \ (|w| > p \wedge p \text{ ist prim}) \implies w_p = 0\}$. Erinnerung: $w_p \in \Sigma$ bezeichnet den Buchstaben an der p-ten Stelle im Wort w.