

Einführung in die Theoretische Informatik

Sommersemester 2024 – Übungsblatt 9

- Das Übungsblatt ist in zwei Teile gegliedert: den Vorbereitungsteil, den Sie vor der Übung selbstständig bearbeiten sollen, und den Übungs-/Nachbereitungsteil, der Aufgaben enthält, die in der Übung besprochen werden und von Ihnen anschließend zur Nachbereitung verwendet werden können.

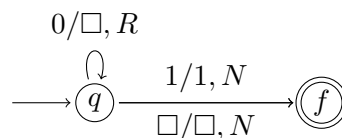
Notation von TMs: Bei Turing Maschinen verwendet man eine zu PDAs ähnliche graphische Notation: Sei $M = (\{q, f\}, \{0, 1\}, \{0, 1, \square\}, \delta, q, \square, \{f\})$ eine TM mit δ :

$$\delta(q, \square) = (f, \square, N)$$

$$\delta(q, 0) = (q, \square, R)$$

$$\delta(q, 1) = (f, 1, N)$$

Diese Maschine entfernt führende Nullen. Nun schreibt man auf die Transitionen $\alpha/\beta, D$ mit $\alpha, \beta \in \Gamma$ und $D \in \{L, N, R\}$. Dies bedeutet, dass der Bandbuchstabe α an der Kopf Position steht und durch β ersetzt wird. Danach bewegt sich der Kopf nach links (L), rechts (R) oder gar nicht (N). Graphisch ist dies:



Vorbereitung (vor der Übung selbständig zu bearbeiten)

Vorbereitungsaufgabe Ü9.1. (Wichtige Begriffe)

Überprüfen Sie, dass Sie die folgenden Begriffe oder Notationen korrekt definieren können.

- abzählbar / überabzählbar
- berechenbar / unberechenbar
- Church-Turing These
- nichtdeterministische / deterministische Turing-Maschine (TM)
- Konfiguration einer TM
- akzeptierte Sprache einer TM
- Turing-berechenbar
- k -Band Turing-Maschine

Vorbereitungsaufgabe Ü9.2. (Meine erste TM)

Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Geben Sie eine TM M an, sodass:

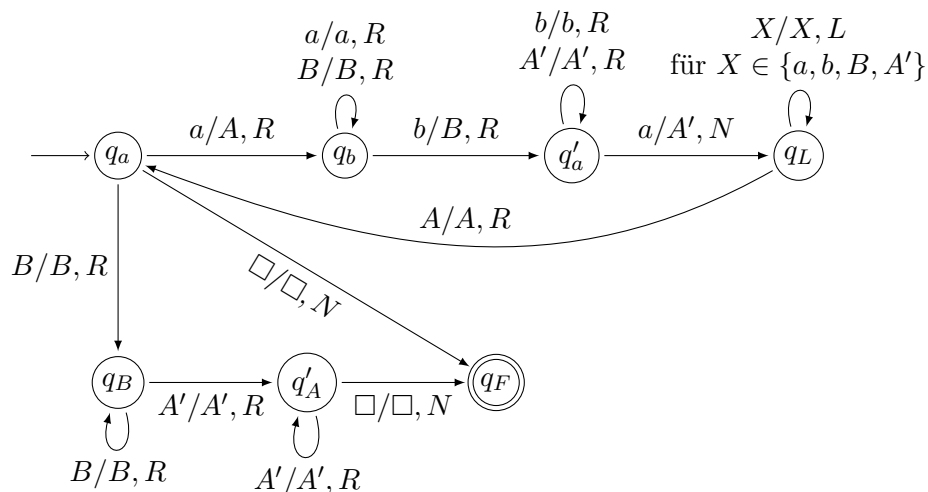
$$L(M) = \{a^n b^n a^n \mid n \geq 0\}$$

Tipp: Es gibt verschiedene Webseiten auf denen Turing Maschinen interaktiv konstruiert und simuliert werden können, z.B. <https://turingmachinesimulator.com/>.

Lösungsskizze. Idee: Ersetze für jedes a je ein a , b und a durch einen Marker, wobei nach dem Ersetzen die restlichen Buchstaben der gleichen Art unverändert gelassen werden. Wenn am Ende nur noch Marker auf dem Band stehen, terminiere. Sonst bleibt die Berechnung in einem Nichtendzustand stecken.

Wir schreiben \square für eine leere Bandzelle.

Sei TM $M = (\{q_a, q_b, q'_a, q_L, q_B, q'_A, q_F\}, \{a, b\}, \Sigma \cup \{A, B, A', \square\}, \delta, q_a, \square, \{q_F\})$.



Übung und Nachbereitung

Übungsaufgabe Ü9.3. (TM Berechnung)

- Konstruieren Sie eine Turingmaschine $T = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, \square, \delta, F)$, mit $\Sigma = \{|\}$, die eine eingegebene Strichzahl verdoppelt.
- (Optional) In der Vorlesung haben Sie auf <https://turingmachinesimulator.com/>, Beispiel "Duplicate Binary String", gesehen, wie eine Maschine für ein Wort $w \in \Sigma^* = \{0, 1\}^*$ das Wort ww^R erzeugt. Modifizieren Sie die Maschine auf der Website, sodass sie stattdessen das Wort ww erzeugt.

Übungsaufgabe Ü9.4. (Blau und Schlaw)

Entscheiden Sie ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Begründen Sie ihre Behauptung. Ein ausführlicher formaler Beweis ist nicht gefordert, aber eine umfassende Begründung.

- Wenn f, g berechenbar sind, dann ist $f \circ g$ berechenbar.
- Wenn $f \circ g$ berechenbar ist, dann sind f, g berechenbar.

- (c) In einem unzerstörbaren, unknackbaren, uneinsehbaren Safe befindet sich ein Zettel, auf dem eine jedem unbekannte natürliche Zahl z steht. Die Funktion

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } n = z \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist berechenbar.

- (d) Die Klasse der “ruhelosen” Turingmaschinen, die ihren Kopf in jedem Schritt bewegen müssen (d.h. für alle Transitionen $\delta(q, a) = (q', b, D)$ muss $D \neq N$ sein), akzeptiert genau die Typ-0-Sprachen.
- (e) Die Klasse der nichtdeterministischen Turingmaschinen, die jede Zelle ihres Bandes höchstens zweimal ändern, akzeptiert genau die Typ-0-Sprachen. Eine Transition $\delta(q, a) = (q', b, D)$ ändert eine Zelle, falls $a \neq b$.

In der Vorlesung wurde die Annahme gemacht, dass die Übergangsfunktion δ einer Turingmaschine folgende Eigenschaft erfüllt:

$$\delta(q, a) \text{ ist nicht definiert für alle } q \in F, a \in \Gamma.$$

Sei \mathcal{M}_A die Menge der Turingmaschinen, die diese Annahme erfüllen, und sei \mathcal{M} die Menge aller Turingmaschinen. Es gilt somit $\mathcal{M}_A \subsetneq \mathcal{M}$.

Für $M \in \mathcal{M}$ mit $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \square, F)$ definiere:

- $L_F(M) := \{w \in \Sigma^* \mid \exists \alpha, \beta \in \Gamma^*, f \in F. (\varepsilon, q_0, w) \rightarrow_M^* (\alpha, f, \beta)\}$.
(Menge der Wörter, für die die Maschine einen Endzustand irgendwann besucht.)
- $L_H(M) := \{w \in \Sigma^* \mid \exists \alpha, \beta \in \Gamma^*, q \in Q. (\varepsilon, q_0, w) \rightarrow_M^* (\alpha, q, \beta) \text{ und } \delta(q, \text{first}(\beta)) \text{ ist nicht definiert}\}$.
(Menge der Wörter, für die die Maschine hält.)
- $L_{HF}(M) := \{w \in \Sigma^* \mid \exists \alpha, \beta \in \Gamma^*, f \in F. (\varepsilon, q_0, w) \rightarrow_M^* (\alpha, f, \beta) \text{ und } \delta(f, \text{first}(\beta)) \text{ ist nicht definiert}\}$.
(Menge der Wörter, für die die Maschine in einem Endzustand hält.)

Übungsaufgabe Ü9.5. (TM Akzeptanzbedingungen)

Begründen Sie folgende Aussagen, indem Sie eine passende Konstruktion angeben.

- (a) Für jede Turing-Maschine $M \in \mathcal{M}_A$ gibt es eine Turing-Maschine $M' \in \mathcal{M}$ mit $L_F(M) = L_H(M')$.
- (b) Für jede Turing-Maschine $M \in \mathcal{M}$ gibt es eine Turing-Maschine $M' \in \mathcal{M}_A$ mit $L_H(M) = L_F(M')$.
- (c) Für jede Turing-Maschine $M \in \mathcal{M}_A$ gibt es eine Turing-Maschine $M' \in \mathcal{M}$ mit $L_F(M) = L_F(M')$.
- (d) Für jede Turing-Maschine $M \in \mathcal{M}$ gibt es eine Turing-Maschine $M' \in \mathcal{M}_A$ mit $L_F(M) = L_F(M')$.
- (e) Für jede Turing-Maschine $M \in \mathcal{M}$ gibt es eine Turing-Maschine $M' \in \mathcal{M}$ mit $L_F(M) = L_H(M')$.