Prof. Javier Esparza
Philipp Czerner, Kevin Kappelmann, Valentin Krasotin

Technische Universität München
Lehrstuhl für Theoretische Informatik

Einführung in die Theoretische Informatik

Sommersemester 2024 – Übungsblatt 8

- Das Übungsblatt ist in zwei Teile gegliedert: den Vorbereitungsteil, den Sie vor der Übung selbstständig bearbeiten sollen, und den Übungs-/Nachbereitungsteil, der Aufgaben enthält, die in der Übung besprochen werden und von Ihnen anschließend zur Nachbereitung verwendet werden können.

Notation von PDA-Regeln: Anstatt der in den Folien verwendeten Schreibweise $(q, YZ) \in \delta(p, a, X)$ für die Ersetzungsregeln eines PDA kann man alternativ $pX \xrightarrow{a} qYZ$ schreiben wobei $p, q \in Q$, $X \in \Gamma$, $YZ \in \Gamma^*$, $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$.

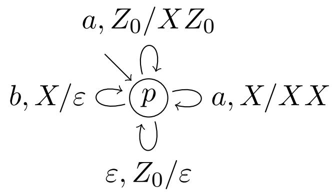
Beispiel: Den PDA mit δ:

$$\delta(p, a, Z_0) = \{(p, XZ_0)\} \qquad \delta(p, a, X) = \{(p, XX)\}$$
$$\delta(p, b, X) = \{(p, \varepsilon)\} \qquad \delta(p, \varepsilon, Z_0) = \{(p, \varepsilon)\}$$

schreibt man alternativ:

$$pZ_0 \xrightarrow{a} pXZ_0 \qquad pX \xrightarrow{a} pXX \qquad pX \xrightarrow{b} p \qquad pZ_0 \xrightarrow{\varepsilon} p$$

oder man stellt diesen als Graph mit Knotenmenge Q dar, wobei die Kante (p, q) dann mit "$a, X/YZ$" beschriftet ist:



Für einige häufige Fälle führen wir außerdem weitere Kurzschreibweisen ein. Sei $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \delta, F)$ ein PDA mit $\Gamma = \{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$ und $a \in \Sigma \cup \{\epsilon\}$. Wir schreiben

- $a, \Gamma/\varepsilon$ statt $a, X_1/\varepsilon, \ldots, a, X_k/\varepsilon$ und
- $a, \Gamma/\alpha\Gamma$ statt $a, X_1/\alpha X_1, \ldots, a, X_k/\alpha X_k$, mit $\alpha \in \Gamma^*$

Vorbereitung (→ vor der Übung selbständig zu bearbeiten)

Vorbereitungsaufgabe Ü8.1. (*Wichtige Begriffe*)

Überprüfen Sie, dass Sie die folgenden Begriffe oder Notationen korrekt definieren können.

- Kellerautomat (PDA)
- Unterschied zwischen $L_\epsilon(A)$ und $L_F(A)$ für einen PDA A

- deterministischer Kellerautomat (DPDA)
- deterministische kontextfreie Sprache (DCFL)
- Abschlusseigenschaften von DCFL
- Abschlusseigenschaften von CFL

Vorbereitungsaufgabe Ü8.2. (*Automata Tutor: "DPDAs"*)

Lösen Sie die Aufgaben Ü8.2 (a–c) auf Automata Tutor.

Übung und Nachbereitung

Übungsaufgabe Ü8.3. (*PDAs*)

Geben Sie für die folgenden Sprachen jeweils einen Kellerautomaten A_i in einer der oben aufgeführten Darstellungsarten an, sodass $L_i = L(A_i)$. Der Automat soll mit *leerem Stack* akzeptieren. Geben Sie dann zusätzlich für jeden Automaten jeweils ein nicht-leeres Wort w mit akzeptierendem Lauf an.

(a) $L_1 = \{a^n b^{3n} \mid n \geq 0\}$

(b) $L_2 = \{a^n b^m \in \{a,b\}^* \mid n \leq m \leq 2n\}$

(c) $L_3 = \{w \in \{a,b\}^* \mid 2 \cdot |w|_a = 3 \cdot |w|_b\}$

Übungsaufgabe Ü8.4. (*PDA Einschränkungen*)

(a) Wir beschränken die Größe des Kelleralphabets Γ von PDAs und zeigen, dass jede kontextfreie Sprache von einem PDA mit $|\Gamma| = 2$ erkannt werden kann. Skizzieren Sie hierzu eine allgemeine Übersetzung von einem PDA mit $|\Gamma| > 2$ zu einem PDA mit $|\Gamma'| = 2$, sodass beide Automaten die gleiche Sprache erkennen.

(b) Wir beschränken die Kellerhöhe von PDAs auf maximal k Kellerzeichen und nennen diese PDAs *k-bounded-Stack-PDA*. Insbesonders kann ein solcher PDA keine PUSH-Operationen ausführen, sollten danach mehr als k Symbole auf dem Stack liegen. Zeigen Sie, dass k-bounded-Stack-PDA genau die regulären Sprachen erkennen, indem Sie eine allgemeine Übersetzung zu $\varepsilon-$NFAs angeben.

Übungsaufgabe Ü8.5. (*Kodiergott*)

Sei $n \in \mathbb{N}_+$. Für ein Wort $w \in \{0,1\}^*$ bezeichnen wir mit $(w)_2$ den Dezimalwert des Binärwortes in most-significant-bit-first-Darstellung. Beispielsweise $(1100)_2 = 12$.

Betrachte die Sprache $L := \{wa^{(w)_2} \mid w \in \{0,1\}^n\}$. Beispielsweise gilt $1100a^{12} \in L$. Konstruieren Sie einen deterministischen PDA für L mit $\mathcal{O}(n)$ Stacksymbolen und Zuständen. Außerdem soll die Kellerhöhe des Automaten stets $\mathcal{O}(n)$ beschränkt sein.

Übungsaufgabe Ü8.6. (*CFG → PDA*)

Wie Sie in der Vorlesung gesehen haben (ab Folie 203), können kontextfreie Grammatiken und Pushdown-Automaten sich gegenseitig simulieren. Wir üben nun die Übersetzungen von CFGs zu PDAs.

Überführen Sie die folgende CFG $G = (\{S\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}, P, S)$ mit Hilfe des Satzes der Vorlesung in einen PDA M mit $L_\varepsilon(M) = L(G)$:

$$S \to SS \mid \mathtt{a}S\mathtt{b} \mid \mathtt{b}S\mathtt{a} \mid \mathtt{c}$$

Zusätzliche Übungsaufgabe Ü8.7. (*Zählerautomaten*)

Hinweis: In dieser Aufgabe werden keine neuen Vorlesungsinhalte besprochen. Sie können die Aufgabe zur zusätzlichen Übung nutzen.

Wir beschränken in dieser Aufgabe das Kelleralphabet von PDAs auf nur ein einziges Symbol und untersuchen die Ausdrucksmächtigkeit dieser Automaten etwas genauer.

(a) Geben Sie eine äquivalente Formulierung als Automaten, die statt des Kellers einen Zähler verwenden, an.

(b) Geben Sie einen solchen Automaten an, der eine nicht reguläre Sprache akzeptiert.

(c) Nun betrachten wir eine Variante, die zusätzlich noch ein Kellersymbol erlaubt, um den Anfang des Kellers zu markieren. Geben Sie wieder eine Charakterisierung mit Zählern an und einen Automaten, der eine kontextfreie Sprache akzeptiert, die von keinem Automaten im vorherigen Modell akzeptiert wird.

(d) Geben Sie eine kontextfreie Sprache an, die von keiner der betrachteten Automatenklassen akzeptiert wird.

Die folgenden Aufgaben können alle unabhängig voneinander gelöst werden:

(e) Geben Sie einen solchen Automaten an, der die Sprache $\overline{L}$ für $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid w = w^R\}$ akzeptiert.

(f) Nun betrachten wir deterministische Varianten dieser Automaten. Zeigen Sie zunächst, dass die Klasse dieser deterministischen Automaten unter dem Sprachkomplement abgeschlossen ist.

(g) Zeigen Sie, dass kein deterministischer Zählerautomat die Sprache L akzeptiert. *Hinweis:* Wie viele verschiedene Zustände kann ein Automat beim Lesen von Worten der Länge n erreichen?

(h) Zeigen Sie aus den vorherigen Aussagen, dass nichtdeterministische Automaten mit einem Zähler strikt mächtiger sind als deterministische Automaten mit beliebig vielen Zählern.