Prof. Javier Esparza
Philipp Czerner, Kevin Kappelmann, Valentin Krasotin

Technische Universität München
Lehrstuhl für Theoretische Informatik

Einführung in die Theoretische Informatik

Sommersemester 2024 – Übungsblatt 3

- **Tipp:** Auf dieser (und dort verlinkten) Website(n) können Sie interaktiv DFAs, NFAs, reguläre Ausdrücke,... erzeugen, simuliereren, umwandeln, ...

  Beachten Sie, dass auf der Website \$ statt ε verwendet wird.
- Das Übungsblatt ist in zwei Teile gegliedert: den Vorbereitungsteil, den Sie vor der Übung selbstständig bearbeiten sollen, und den Übungs-/Nachbereitungsteil, der Aufgaben enthält, die in der Übung besprochen werden und von Ihnen anschließend zur Nachbereitung verwendet werden können.
- Für den Rest des Semesters gilt: $\mathbb{N} := \mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, ...\}$ und $\mathbb{N}_+ := \mathbb{N}_0 \setminus \{0\}$.

Vorbereitung (→ vor der Übung selbständig zu bearbeiten)

Vorbereitungsaufgabe Ü3.1. (*Wichtige Begriffe*)

Überprüfen Sie, dass Sie die folgenden Begriffe/Notationen/Theorem korrekt definieren können.

- Ardens Lemma
- Produktkonstruktion
- Pumping-Lemma

Übung und Nachbereitung

Übungsaufgabe Ü3.2. (*RE → ϵ-NFA*)

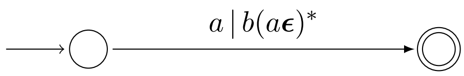
Wandeln sie folgenden regulären Ausdruck $a \mid (b \mid \emptyset)(a(b\emptyset)^*)^*$ in einen ϵ-NFA um. Folgen Sie hierfür strikt dem Vorgehen aus der Vorlesung.

Lösungsskizze.

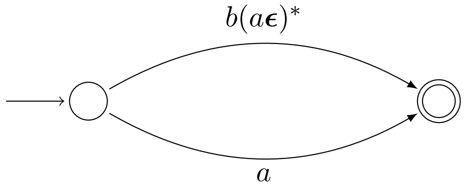
Schritt 1:

$$a \mid (b \mid \emptyset)(a(b\emptyset)^*)^* \rightsquigarrow a \mid b(a(b\emptyset)^*)^* \rightsquigarrow a \mid b(a\emptyset^*)^* \rightsquigarrow a \mid b(a\epsilon)^*$$

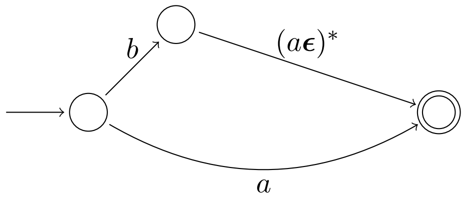
Schritt 2:



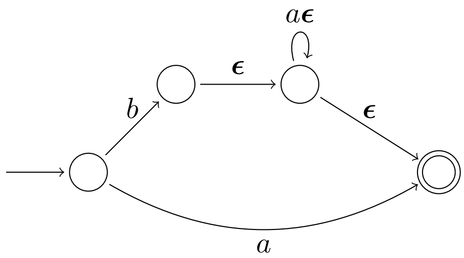
Auswahl:



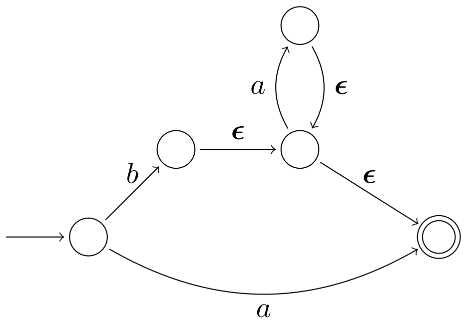
Konkatenation:



Iteration:

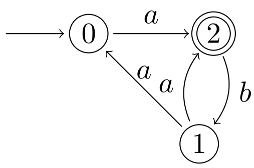


Konkatenation:



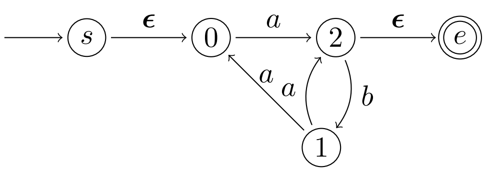
Übungsaufgabe Ü3.3. (ϵ*-NFA* $\rightarrow$ *RE*)

Wandeln Sie folgenden ϵ-NFA in einen regulären Ausdruck um. Folgen Sie dem Vorgehen in der Vorlesung und eliminieren Sie die Zustände in aufsteigender Reihenfolge.

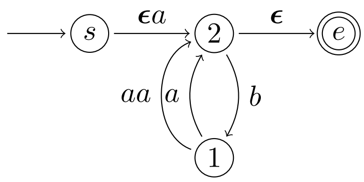


Lösungsskizze.

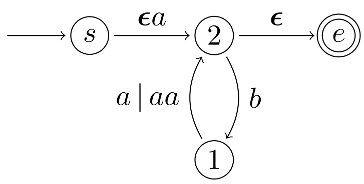
Preproccessing:



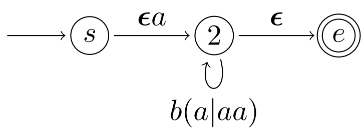
Eliminiere 0:



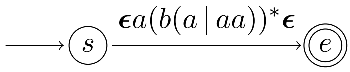
Vereinige Transitionen:



Eliminiere 1:



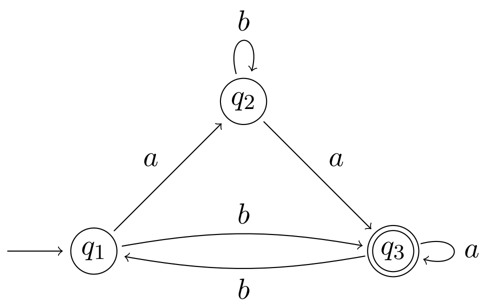
Eliminiere 2:



Der entstehende reguläre Ausdruck ist: $\boldsymbol{\epsilon} a(b(a \mid aa))^* \boldsymbol{\epsilon}$

Übungsaufgabe Ü3.4. (*Ardens Lemma*)

Gegeben sei folgender Automat $M = (\{q_1, q_2, q_3\}, \{a, b\}, \delta, q_1, \{q_3\})$:



Berechnen Sie mit dem Gauß-Verfahren und Ardens Lemma einen regulären Ausdruck α mit $L(\alpha) = L(M)$.

Lösungsskizze. Gleichungssystem:

$$X_1 \equiv aX_2 \mid bX_3 \tag{1}$$
$$X_2 \equiv aX_3 \mid bX_2 \tag{2}$$
$$X_3 \equiv aX_3 \mid bX_1 \mid \boldsymbol{\epsilon} \tag{3}$$

Gleichung (2) nach X_2 auflösen und in (1) einsetzen:

$$X_2 \equiv b^*aX_3 \tag{4}$$
$$X_1 \equiv ab^*aX_3 \mid bX_3 \equiv (ab^*a \mid b)X_3 \tag{5}$$

Gleichung (5) in (3) einsetzen und auflösen:

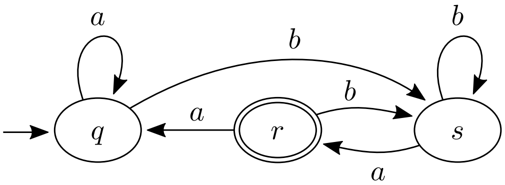
$$\begin{aligned} X_3 &\equiv aX_3 \mid b(ab^*a \mid b)X_3 \mid \boldsymbol{\epsilon} && (6)\\ &\equiv (a \mid b(ab^*a \mid b))^* && (7)\\ &\equiv (a \mid bb \mid bab^*a)^* && (8) \end{aligned}$$

Einsetzen in (5):

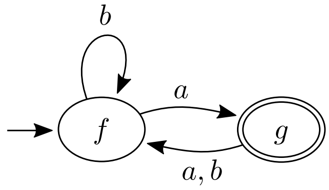
$$X_1 \equiv \alpha \equiv (ab^*a \mid b)(a \mid bb \mid bab^*a)^* \tag{9}$$

Übungsaufgabe Ü3.5. (*Produktkonstruktion*)

(a) Konstruieren Sie einen DFA M mit $L(M) = L(M_1) \cap L(M_2)$, indem Sie die Produktkonstruktion verwenden. Gibt es einen DFA M' mit $L(M') = L(M)$, der weniger Zustände als M hat?



M_1

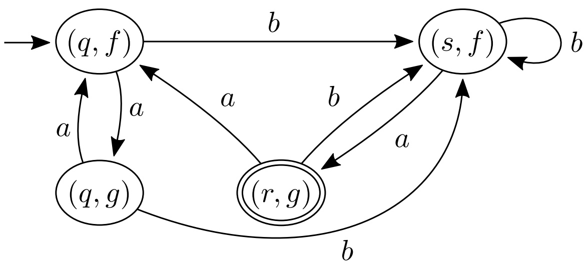


M_2

(b) Konstruieren Sie nun einen Automaten für $L(M_1) \cup L(M_2)$.

Lösungsskizze.

(a)



Der DFA M ist nicht minimal. Er akzeptiert dieselbe Sprache wie M_1.

(b) Wir können das Ergebnis aus (a) wiederverwenden. Wir müssen nur die Finalzustände ändern. Es sind nun (q, g) und (r, g) Endzustände.

Übungsaufgabe Ü3.6. (*Pumping-Lemma*)

Beweisen Sie für jede der folgenden Sprachen mithilfe des Pumping-Lemmas, dass sie *nicht* regulär ist.

(a) $L_1 = \{w \in \{0,1\}^* \mid w = w^R\}$

(b) $L_2 = \{w \in \{0,1\}^* \mid |w|_0 \geq |w|_1\}$

(c) $L_5 = \{a^{2^i} \mid i \geq 0\}$

Lösungsskizze.

(a) Angenommen, L_1 wäre regulär.

Dann können wir das Pumping-Lemma anwenden.

Sei $n \in \mathbb{N}_+$ eine Pumping-Lemma-Zahl.

Dann gilt $z = 0^n 1 0^n \in L_1$ und $|z| \geq n$.

Es gibt also für z eine Zerlegung $z = uvw$ mit $v \neq \varepsilon$ und $|uv| \leq n$, sodass $uv^i w \in L_1$ für alle $i \in \mathbb{N}$ $(*)$.

Durch unsere Wahl von z folgt $uv = 0^k$ für $0 < k \leq n$. Also $u = 0^i$ und $v = 0^j$ mit $i + j = k$ und $j > 0$.

Dann ist aber $uv^2w = 0^i 0^{2j} 0^{n-k} 1 0^n \notin L_1$, denn $i + 2j + n - k > n$. Dies steht im Widerspruch zu $(*)$.

Das heißt unsere ursprüngliche Annahme ist falsch und L_1 nicht regulär.

(b) Angenommen, L_2 wäre regulär.

Dann können wir das Pumping-Lemma anwenden.

Sei $n \in \mathbb{N}_+$ eine Pumping-Lemma-Zahl.

Dann gilt $z = 0^n 1^n \in L_2$ und $|z| \geq n$.

Es gibt also für z eine Zerlegung $z = uvw$ mit $v \neq \varepsilon$ und $|uv| \leq n$, sodass $uv^i w \in L_2$ für alle $i \in \mathbb{N}$ $(*)$.

Aus unserer Wahl von z folgt, dass $u = 0^i$ und $v = 0^j$ mit $j > 0$ gilt.

Allerdings ist $uv^0w = 0^i 0^{n-i-j} 1^n \notin L_2$, weil $i + (n - i - j) = n - j < n$. Dies steht im Widerspruch zu $(*)$.

Das heißt unsere ursprüngliche Annahme ist falsch und L_2 nicht regulär.

(c) Angenommen, L_5 wäre regulär.

Dann können wir das Pumping-Lemma anwenden.

Sei $n \in \mathbb{N}_+$ eine Pumping-Lemma-Zahl.

Dann gilt $a^{2^n} \in L_5$ und $|a^{2^n}| \geq n$.

Es gibt also für z eine Zerlegung $z = uvw$ mit $v \neq \varepsilon$ und $|uv| \leq n$, sodass $uv^i w \in L_5$ für alle $i \in \mathbb{N}$ $(*)$.

Deshalb $v = a^j$ für ein $0 < j \leq n$.

Dann ist aber $uv^2w = a^{2^n + j} \notin L_5$, denn

$$2^n < 2^n + j \leq 2^n + n < 2^n + 2^n = 2^{n+1}$$

Dies steht im Widerspruch zu $(*)$.

Das heißt unsere ursprüngliche Annahme ist falsch und L_5 nicht regulär.