Prof. Javier Esparza
Philipp Czerner, Kevin Kappelmann, Valentin Krasotin

Technische Universität München
Lehrstuhl für Theoretische Informatik

# Einführung in die Theoretische Informatik

Sommersemester 2024 – Übungsblatt 2

- **Tipp:** Auf dieser (und dort verlinkten) Website(n) können Sie interaktiv DFAs, NFAs, reguläre Ausdrücke,... erzeugen, simuliereren, umwandeln, ...

  Beachten Sie, dass auf der Website \$ statt $\epsilon$ verwendet wird.
- Das Übungsblatt ist in zwei Teile gegliedert: den Vorbereitungsteil, den Sie vor der Übung selbstständig bearbeiten sollen, und den Übungs-/Nachbereitungsteil, der Aufgaben enthält, die in der Übung besprochen werden und von Ihnen anschließend zur Nachbereitung verwendet werden können.
- Für den Rest des Semesters gilt: $\mathbb{N} := \mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, ...\}$ und $\mathbb{N}_+ := \mathbb{N}_0 \setminus \{0\}$.

## Vorbereitung ($\rightarrow$ vor der Übung selbständig zu bearbeiten)

**Vorbereitungsaufgabe Ü2.1.** (*Wichtige Begriffe*)

Überprüfen Sie, dass Sie die folgenden Begriffe oder Notationen korrekt definieren können.

- NFA und deren Akzeptanzbedingung
- $\epsilon$-NFA
- Potenzmengenkonstruktion
- Rechtslineare Grammatik
- Regulärer Ausdruck

**Vorbereitungsaufgabe Ü2.2.** (*Automata Tutor: NFAs und Reguläre Ausdrücke*)

Lösen Sie die Aufgaben Ü2.2 (a–i) auf Automata Tutor. Beachten Sie, dass wir für einen regulären Ausdruck $r$ das folgende Makro definieren: $r^+ := rr^*$.

**Vorbereitungsaufgabe Ü2.3.** (*Konstruieren von NFAs mit Einschränkungen*)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen korrekt sind, und begründen Sie Ihre Behauptung, indem Sie entweder ein Gegenbeispiel oder eine passende Konstruktion angeben.

Für jeden NFA $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ gibt es einen NFA $N' = (Q', \Sigma, \delta', q_0', F')$ mit $L(N) = L(N')$ und ...

(a) der Startzustand hat keine eingehenden Kanten.

(b) kein Endzustand hat eine ausgehende Kante.

(c) für jeden Zustand $q$ gilt: alle eingehenden Kanten von $q$ sind mit demselben Zeichen beschriftet.

(d) für jeden Zustand $q$ gilt: alle ausgehenden Kanten von $q$ sind mit demselben Zeichen beschriftet.

Zu dieser Aufgabe gibt es Video-Lösungen: (a) (b) (c) (d)

*Lösungsskizze.*

(a) Ja: Man erstellt vom Startzustand $q_0$ eine Kopie $q_0'$, die nur die ausgehenden Kanten von $q_0$ erbt. Danach wird $q_0$ zu einem normalen Zustand, während $q_0'$ zu einem Startzustand wird. Formal: $N' = (Q', \Sigma, \delta', q_0', F')$, wobei

- $Q' = Q \cup \{q_0'\}$,
- $\delta' = \delta \cup \{(q_0', x, q) : (q_0, x, q) \in \delta\}$
- $F' = F \cup \{q_0' : q_0 \in F\}$

(b) Nein: Betrachte einen NFA $N$ für $L = \{\epsilon, a\}$.

(c) Ja: man spaltet jeden Zustand $q \in Q$ nach dem Buchstaben der eingehenden Kanten auf, d.h. aus $q$ macht man die Zustände $(q, x)$ für jedes $x \in \Sigma$.

Danach setzt man $\delta'((q, x), y, (q', y)) := \delta(q, y, q')$.

Wird dabei der Startzustand aufgespalten, wählt man einen beliebigen daraus hervorgehenden Zustand als neuen Startzustand.

(d) Nein: Betrachte einen NFA $N$ mit $L(N) = \{a, b\} = \Sigma$. Dann gilt $\delta(q_0, a) \cap F \neq \emptyset$ und $\delta(q_0, b) \cap F \neq \emptyset$.

## Übung und Nachbereitung

**Übungsaufgabe Ü2.4.** (*Tick Tock Boom, Blow Up*)

Mit $|w|_x$ bezeichnen wir die Anzahl der Vorkommen des Buchstabens $x \in \Sigma$ in $w \in \Sigma^*$. Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$ und $L = \{w \in \Sigma^* \mid \exists\, x \in \Sigma.\ |w|_x = 0\}$.

(a) Konstruieren Sie einen NFA $N$ mit genau 4 Zuständen und $L(N) = L$.

(b) Determinisieren Sie den NFA $N$ aus (a) mittels der Potenzmengenkonstruktion um einen DFA $D$ mit $L(D) = L(N)$ zu erhalten.

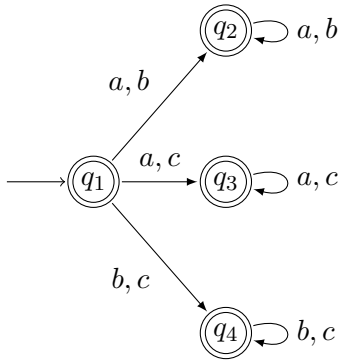
(c) Geben Sie eine rechtslineare Grammatik $G$ (gemäß Satz 3.13) an, sodass $L(G) = L(D)$.

(d) Übersetzen Sie die Grammatik $G$ (gemäß Satz 3.9) in einen NFA $N'$, sodass $L(N') = L(G)$.

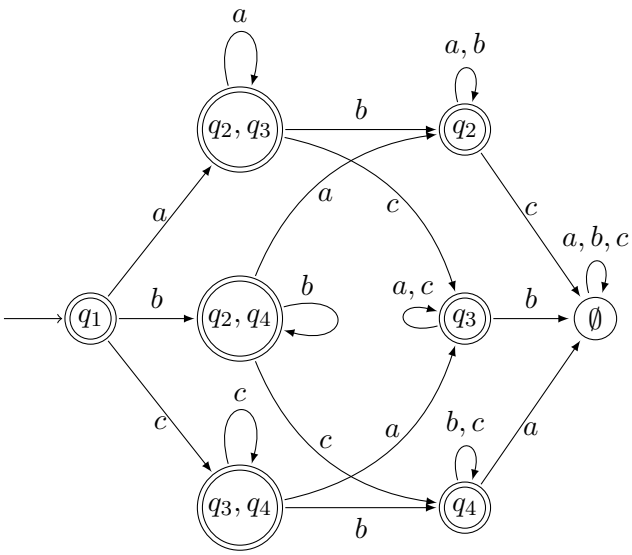
(e) Vergleichen Sie die NFAs $N'$ und $N$ bezüglich Zustands- und Transitionszahl. Diskutieren Sie dann, inwiefern Sie Ihre Beobachtung verallgemeinern können.

*Lösungsskizze.*

(a) Der folgende NFA rät im initialen Zustand welche beiden Buchstaben im Wort auftauchen:



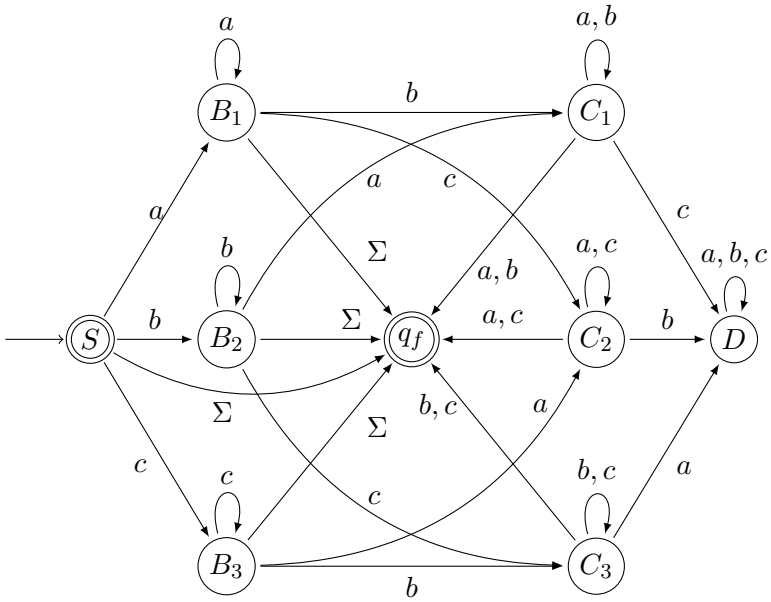

(b) Anwendung der Potenzmengenkonstruktion:




(c) Jeder Zustand entspricht einem Nicht-Terminal, die Terminale sind gerade das Alphabet $\Sigma$, der initiale Zustand wird zum Startsymbol. Zur Vereinfachung benennen wir die Zustände von oben nach unten und links nach rechts von $A$ bis $C_3$, wie oben gezeichnet. Dann ergibt sich folgende Grammatik

- $S \to aB_1 \mid bB_2 \mid cB_3 \mid a \mid b \mid c \mid \epsilon$
- $B_1 \to a \mid b \mid c \mid aB_1 \mid bC_1 \mid cC_2$
- $B_2 \to a \mid b \mid c \mid bB_2 \mid aC_1 \mid cC_3$
- $B_3 \to a \mid b \mid c \mid cB_3 \mid aC_2 \mid bC_3$
- $C_1 \to a \mid b \mid aC_1 \mid bC_1 \mid cD$
- $C_2 \to a \mid c \mid aC_2 \mid cC_2 \mid bD$
- $C_3 \to b \mid c \mid bC_3 \mid cC_3 \mid aD$
- $D \to aD \mid bD \mid cD$

(d) Wir erhalten folgenden Automaten:




(e) Diese Übersetzung (NFA → DFA → Grammatik → NFA) induziert eine Normalform, in der es maximal 2 Endzustände gibt. Die Anzahl der Zustände entspricht der Anzahl der Variablen in der Grammatik plus den dedizierten $q_f$ Zustand. Durch die Potenzmengenkonstruktion von $N$ zu $D$ wird die Zustandzahl vergrößert (möglicherweise exponentiell), und nachdem die Grammatik für jeden Zustand des DFA ein Nichtterminal hat, ist die Zustandszahl von $N'$ möglicherweise exponentiell größer als die von $N$.

**Übungsaufgabe Ü2.5.** (*Teilwörter und reguläre Sprachen*)

Ein Teilwort eines Wortes $w$ ist ein zusammenhängendes Wort in $w$. Wir definieren die Menge aller Teilwörter von $w$ als $\downarrow[w] := \{w' \in \Sigma^* : w \text{ enthält } w'\}$. Also gilt beispielsweise $the, he, theo, \epsilon \in \downarrow[theo]$, aber $to, theoo \notin \downarrow[theo]$. Die Menge aller Wörter, von denen $w$ ein Teilwort ist, ist dann entsprechend definiert als $\uparrow[w] := \{w' \in \Sigma^* : w' \text{ enthält } w\}$; z.B. $thetheotee \in \uparrow[theo]$. Wir erweitern dies auf Sprachen: Für eine beliebige Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ definieren wir also $\downarrow[L] := \bigcup_{w \in L} \downarrow[w]$ und $\uparrow[L] := \bigcup_{w \in L} \uparrow[w]$.

Sei nun $\Sigma := \{t, h, e, o\}$ und $L$ eine beliebige reguläre Sprache.

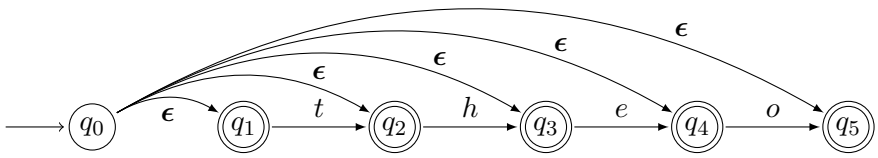
(a) Geben Sie für $\downarrow[theo]$ und $\uparrow[theo]$ einen $\epsilon$-NFA an.

(b) Zeigen Sie, dass $\downarrow[L]$ regulär ist.

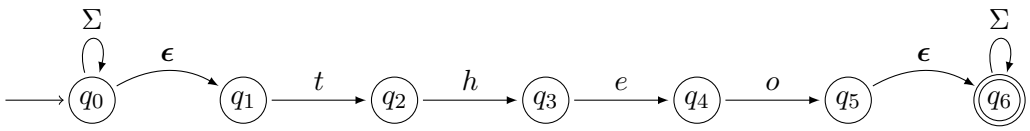
(c) Zeigen Sie, dass $\uparrow[L]$ regulär ist.

*Lösungsskizze.*

(a) $\epsilon$-NFA für $\downarrow[theo]$:



$\epsilon$-NFA für $\uparrow[theo]$:




(b) Wenn $L$ regulär ist, gibt es einen NFA $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, der $L$ akzeptiert. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir außerdem annehmen, dass in $N$ jeder Zustand von $q_0$ aus erreichbar ist und aus jedem Zustand ein Endzustand erreicht werden kann. Beweis: Übung!

Wir zeigen nun, dass es einen $\epsilon$-NFA $N'$ gibt, der $\downarrow[L]$ akzeptiert, indem wir $N$ modifizieren.

**Idee:** Da wir alle Teilwörter akzeptieren wollen, muss es in $N'$ möglich sein, ein Präfix zu überspringen. Dafür führen wir einen neuen Startzustand ein, der jeden anderen Zustand mit einem $\epsilon$-Übergang erreichen kann. Da auch ein beliebiges Suffix gelöscht werden darf, wird jeder Zustand in $N$ akzeptierend (da nach Annahme von jedem Zustand aus ein Endzustand erreicht werden kann).

Wir definieren also den $\epsilon$-NFA $N' := (Q \cup \{q_0'\}, \Sigma, \delta', q_0', Q)$ mit $q_0' \notin Q$. Dabei ist

$$\delta' := \delta \cup \{(q_0', \boldsymbol{\epsilon}, q) \mid q \in Q\}.$$

Im folgenden schreiben wir $q \to_N^w q'$ für $\hat{\hat{\delta}}(\{q\}, w) \ni q'$ und $q \to_{N'}^w q'$ für $\hat{\hat{\delta}}'(\{q\}, w) \ni q'$.

Wir müssen zeigen, dass $L(N') = \downarrow[L]$. Sei nun $w = a_1 \cdots a_n \in \Sigma^*$. Es gilt

$$\begin{aligned}
w \in L(N') &\iff \exists q_1, \ldots, q_n.\ q_0' \to_{N'}^{\epsilon} q_1 \to_{N'}^{a_1} q_2 \cdots \to_{N'}^{a_n} q_n \in F' && \text{(Def. } \delta'\text{)} \\
&\iff \exists q_1, \ldots, q_n.\ q_1 \to_{N'}^{a_1} q_2 \cdots \to_{N'}^{a_n} q_n \in F' && \text{(Def. } \delta'\text{)} \\
&\iff \exists q_1, \ldots, q_n.\ q_1 \to_{N}^{a_1} q_2 \cdots \to_{N}^{a_n} q_n \in F' && \text{(Def. } \delta'\text{)} \\
&\iff \exists q_1, q_n.\ q_1 \to_N^w q_n \in F' \\
&\iff \exists q_0, q_1, q_n, u.\ q_0 \to_N^u q_1 \to_N^w q_n \in F' \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (q_1 \text{ erreichbar von } q_0 \text{ in } N) \\
&\iff \exists q_0, q_1, q_n, q_f, u, v.\ q_0 \to_N^u q_1 \to_N^w q_n \to_N^v q_f \in F \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (F \text{ erreichbar von } q_n \text{ in } N) \\
&\iff \exists u, v.\ uwv \in L(N) \\
&\iff w \in \downarrow[L].
\end{aligned}$$

(c) Wenn $L$ regulär ist, gibt es einen NFA $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, der L akzeptiert. Wir zeigen, dass es einen $\epsilon$-NFA $N'$ gibt, der $\uparrow[L]$ akzeptiert, indem wir $N$ modifizieren.

**Idee:** Da wir alle Wörter akzeptieren, die ein Wort aus $L$ als Teilwort enthalten, muss es in $N'$ möglich sein ein beliebiges Präfix, dann ein beliebiges Wort aus $L$, und dann einen beliebiges Suffix zu lesen. Also fügen wir einen neuen Startzustand ein, bei dem beliebige Zeichen gelesen werden kann. Dieser erreicht den alten Startzustand mit einem $\epsilon$-Übergang. Statt zu akzeptieren, haben alle in $N$

akzeptierenden Zustand einen $\epsilon$-Übergang zum neuen Endzustand. In diesem wird jedes Wort akzeptiert.

Wir definieren also $\epsilon$-NFA $N' := (Q \cup \{q_0', q_f\}, \Sigma, \delta', q_0', \{q_f\})$ mit $q_0', q_f \notin Q$. Dabei ist

$$\begin{aligned}\delta' := \delta &\cup \{(q_0', x, q_0') \mid x \in \Sigma\} \cup \{(q_0', \epsilon, q_0)\} \\ &\cup \{(q, \epsilon, q_f) \mid q \in F\} \quad \cup \{(q_f, x, q_f) \mid x \in \Sigma\}\end{aligned}$$

Wir müssen zeigen: $L(N') = \uparrow[L]$. Sei nun $w = a_1 \cdots a_n \in \Sigma^*$. Es gilt

$$\begin{aligned}
w \in \uparrow[L] &\iff \exists u, w', v.\ w = uw'v \wedge w' \in L \\
&\iff \exists u, w', v.\ w = uw'v \wedge w' \in L(N) \\
&\iff \exists q_0, q_n, u, w', v.\ w = uw'v \wedge q_0 \to_N^{w'} q_n \in F \\
&\iff \exists q_0, q_n, u, w', v.\ w = uw'v \wedge q_0 \to_{N'}^{w'} q_n \in F && \text{(Def. } \delta'\text{)} \\
&\iff \exists q_0, q_n, u, w', v.\ w = uw'v \wedge q_0' \to_{N'}^{\epsilon} q_0 \to_{N'}^{w'} q_n \to_{N'}^{\epsilon} q_f && \text{(Def. } \delta'\text{)} \\
&\iff \exists q_0, q_n, u, w', v.\ w = uw'v \wedge q_0' \to_{N'}^{u} q_0' \to_{N'}^{\epsilon} q_0 \to_{N'}^{w'} q_n \to_{N'}^{\epsilon} q_f \to_{N'}^{v} q_f && \text{(Def. } \delta'\text{)} \\
&\iff \exists u, w', v.\ w = uw'v \wedge q_0' \to_{N'}^{uw'v} q_f \\
&\iff \exists u, w', v.\ w = uw'v \wedge q_0' \to_{N'}^{w} q_f \\
&\iff w \in L(N'). && \text{(Def. } \delta'\text{)}
\end{aligned}$$

### Übungsaufgabe Ü2.6.

In dieser Aufgabe beschäftigen wir uns mit rekursiven Funktionen und Beweisen auf regulären Ausdrücken.

(a) Geben Sie eine rekursive Funktion $\mathsf{empty}(r)$ an, die für einen gegebenen regulären Ausdruck $r$ entscheidet, ob $L(r) = \emptyset$. Für Ihre Definition sollten Sie das folgende Gerüst verwenden:

- $\mathsf{empty}(\emptyset) =$
- $\mathsf{empty}(\mathsf{a}) =$
- $\mathsf{empty}(\epsilon) =$
- $\mathsf{empty}(\alpha\beta) =$
- $\mathsf{empty}(\alpha \mid \beta) =$
- $\mathsf{empty}(\alpha^*) =$

Beweisen Sie mittels struktureller Induktion, dass Ihre Definition korrekt ist.

**Erinnerung:** Da reguläre Ausdrücke induktiv definiert sind, sind sie mit einem Induktionsschema ausgestattet. Um zu beweisen, dass eine Eigenschaft $P(r)$ für alle regulären Ausdrücke $r$ gilt, können wir dieses Induktionsschema verwenden. Bei Anwendung des Schemas ergeben sich dann folgende Beweisaufgaben:

- Zeige $P(\emptyset)$.
- Zeige $P(\epsilon)$.
- Zeige $P(\mathsf{a})$ für alle $\mathsf{a} \in \Sigma$.
- Unter der Annahme $P(\alpha)$ und $P(\beta)$, zeige $P(\alpha\beta)$.
- Unter der Annahme $P(\alpha)$ und $P(\beta)$, zeige $P(\alpha \mid \beta)$.

- Unter der Annahme $P(\alpha)$, zeige $P(\alpha^*)$.

Dieses Prinzip, welches für alle induktiv definierte Strukturen gilt, wird *strukturelle Induktion* genannt.

(b) **(optionale Teilaufgabe)** Gegeben sein nun folgende Funktion, die bestimmen soll, ob die von einem regulärem Ausdruck erzeugte Sprache unendlich viele Wörter enthält. In anderen Worten soll gelten, dass $\mathsf{infinite}(r) \iff |L(r)| = |\mathbb{N}|$.

- $\mathsf{infinite}(\emptyset) = \mathsf{false}$
- $\mathsf{infinite}(\mathsf{a}) = \mathsf{false}$
- $\mathsf{infinite}(\boldsymbol{\epsilon}) = \mathsf{false}$
- $\mathsf{infinite}(\alpha\beta) = \mathsf{infinite}(\alpha) \vee \mathsf{infinite}(\beta)$
- $\mathsf{infinite}(\alpha \mid \beta) = \mathsf{infinite}(\alpha) \vee \mathsf{infinite}(\beta)$
- $\mathsf{infinite}(\alpha^*) = \mathsf{true}$

Beweisen Sie, dass die obige Definition korrekt ist oder widerlegen Sie die Korrektheit mit einem Gegenbeispiel.

*Lösungsskizze.*

(a) **Konstruktion**

- $\mathsf{empty}(\emptyset) = \mathsf{true}$
- $\mathsf{empty}(\mathsf{a}) = \mathsf{false}$
- $\mathsf{empty}(\boldsymbol{\epsilon}) = \mathsf{false}$
- $\mathsf{empty}(\alpha\beta) = \mathsf{empty}(\alpha) \vee \mathsf{empty}(\beta)$
- $\mathsf{empty}(\alpha \mid \beta) = \mathsf{empty}(\alpha) \wedge \mathsf{empty}(\beta)$
- $\mathsf{empty}(\alpha^*) = \mathsf{false}$

**Korrektheit** Wir zeigen $L(r) = \emptyset \iff \mathsf{empty}(r)$ mittels struktureller Induktion.

**Fall** $r = \emptyset$, $r = \mathsf{a}$, $r = \boldsymbol{\epsilon}$. Trivial; Beispiel:

$$\mathsf{empty}(\boldsymbol{\epsilon}) \overset{\text{Def.}}{\iff} \mathsf{false} \iff \{\epsilon\} = \emptyset \iff L(\boldsymbol{\epsilon}) = \emptyset$$

**Fall** $r = \alpha^*$.
Wir haben $\epsilon \in L(\alpha^*) \neq \emptyset \iff \neg\mathsf{empty}(\alpha^*)$. Die Aussage gilt per Definition von $\mathsf{empty}$.

**Fall** $r = \alpha\beta$.
Als Induktionshypothesen erhalten wir $L(\alpha) = \emptyset \iff \mathsf{empty}(\alpha)$ und $L(\beta) = \emptyset \iff \mathsf{empty}(\beta)$.

Es gilt

$$\begin{aligned} L(\alpha\beta) = \emptyset &\iff L(\alpha)L(\beta) = \emptyset \\ &\iff L(\alpha) = \emptyset \vee L(\beta) = \emptyset \\ &\overset{\text{I.H.}}{\iff} \mathsf{empty}(\alpha) \vee \mathsf{empty}(\beta) = \mathsf{empty}(\alpha\beta). \end{aligned}$$

**Fall** $r = \alpha \mid \beta$.
Es gelten dieselben Induktionshypothesen wie im vorherigen Fall.

Wir haben

$$\begin{aligned} L(\alpha \mid \beta) = \emptyset &\iff L(\alpha) \cup L(\beta) = \emptyset \\ &\iff L(\alpha) = \emptyset \wedge L(\beta) = \emptyset \\ &\overset{\text{I.H.}}{\iff} \mathsf{empty}(\alpha) \wedge \mathsf{empty}(\beta) = \mathsf{empty}(\alpha \mid \beta). \end{aligned}$$

(b) Die Definition ist nicht korrekt. Konkret haben wir $\mathsf{infinite}(\alpha^*) = \mathsf{true}$ für $\alpha \in \{\boldsymbol{\emptyset}, \boldsymbol{\epsilon}\}$ aber anderseits $|L(\alpha^*)| = |\{\epsilon\}| \neq |\mathbb{N}|$ und $\mathsf{infinite}(\boldsymbol{\emptyset}\mathsf{a}^*) = \mathsf{true}$ aber anderseits $|L(\boldsymbol{\emptyset}\mathsf{a}^*)| = |\emptyset\{\mathsf{a}\}^*| = |\emptyset| \neq |\mathbb{N}|$.

Um die Definition zu reparieren, müssen wir deshalb bestimmen, ob ein Wort $w \in L(\alpha)$ mit $\epsilon \neq w$ existiert. Umgekehrt betrachtet definieren wir eine Funktion $\mathsf{nil}$ mit der Eigenschaft $\mathsf{nil}(\alpha) \iff L(\alpha) = \{\epsilon\}$.

- $\mathsf{nil}(\boldsymbol{\emptyset}) = \mathsf{false}$
- $\mathsf{nil}(\mathsf{a}) = \mathsf{false}$
- $\mathsf{nil}(\boldsymbol{\epsilon}) = \mathsf{true}$
- $\mathsf{nil}(\alpha\beta) = \mathsf{nil}(\alpha) \wedge \mathsf{nil}(\beta)$
- $\mathsf{nil}(\alpha \mid \beta) = \mathsf{nil}(\alpha) \wedge \mathsf{nil}(\beta) \vee \mathsf{nil}(\alpha) \wedge \mathsf{empty}(\beta) \vee \mathsf{nil}(\beta) \wedge \mathsf{empty}(\alpha)$
- $\mathsf{nil}(\alpha^*) = \mathsf{empty}(\alpha) \vee \mathsf{nil}(\alpha)$

Wir passen die Definition folgendermaßen an.

- $\mathsf{infinite}(\alpha\beta) = (\neg\mathsf{empty}(\alpha) \wedge \mathsf{infinite}(\beta)) \vee (\neg\mathsf{empty}(\beta) \wedge \mathsf{infinite}(\alpha))$
- $\mathsf{infinite}(\alpha^*) = \neg\mathsf{nil}(\alpha^*)$

Wir beweisen zuerst mittels struktureller Induktion, dass $\mathsf{nil}$ korrekt definiert ist, d.h. wir zeigen $\mathsf{nil}(\alpha) \iff L(\alpha) = \{\epsilon\}$.

**Fall** $r = \boldsymbol{\emptyset}$, $r = \mathsf{a}$, $r = \boldsymbol{\epsilon}$. Trivial.

**Fall** $r = \alpha^*$.
Als Induktionshypothese erhalten wir, dass $\mathsf{nil}(\alpha) \iff L(\alpha) = \{\epsilon\}$. Es gilt

$$\begin{aligned} L(\alpha^*) = \{\epsilon\} &\iff L(\alpha)^* = \{\epsilon\} \\ &\iff L(\alpha) = \emptyset \vee L(\alpha) = \{\epsilon\} \\ &\iff \mathsf{empty}(\alpha) \vee L(\alpha) = \{\epsilon\} \\ &\overset{\text{I.H.}}{\iff} \mathsf{empty}(\alpha) \vee \mathsf{nil}(\alpha) \overset{\text{Def.}}{\iff} \mathsf{nil}(\alpha^*) \end{aligned}$$

**Fall** $r = \alpha\beta$.
Als Induktionshypothesen erhalten wir $L(\alpha) = \{\epsilon\} \iff \mathsf{nil}(\alpha)$ und $L(\beta) = \{\epsilon\} \iff \mathsf{nil}(\beta)$.

Es gilt

$$\begin{aligned} L(\alpha\beta) = \{\epsilon\} &\iff L(\alpha)L(\beta) = \{\epsilon\} \\ &\iff L(\alpha) = \{\epsilon\} \wedge L(\beta) = \{\epsilon\} \\ &\overset{\text{I.H.}}{\iff} \mathsf{nil}(\alpha) \wedge \mathsf{nil}(\beta) \overset{\text{Def.}}{\iff} \mathsf{nil}(\alpha\beta). \end{aligned}$$

**Fall** $r = \alpha \mid \beta$.
Es gelten dieselben Induktionshypothesen wie im vorherigen Fall.

Wir haben

$$\begin{aligned}
L(\alpha \,|\, \beta) = \{\epsilon\} &\iff L(\alpha) \cup L(\beta) = \{\epsilon\} \\
&\iff L(\alpha) = \{\epsilon\} \wedge L(\beta) = \{\epsilon\} \vee L(\alpha) = \{\epsilon\} \wedge L(\beta) = \emptyset \\
&\qquad \vee L(\beta) = \{\epsilon\} \wedge L(\alpha) = \emptyset \\
&\iff L(\alpha) = \{\epsilon\} \wedge L(\beta) = \{\epsilon\} \vee L(\alpha) = \{\epsilon\} \wedge \mathsf{empty}(\beta) \\
&\qquad \vee L(\beta) = \{\epsilon\} \wedge \mathsf{empty}(\alpha) \\
&\overset{\text{I.H.}}{\iff} \mathsf{nil}(\alpha) \wedge \mathsf{nil}(\beta) \vee \mathsf{nil}(\alpha) \wedge \mathsf{empty}(\beta) \vee \mathsf{nil}(\beta) \wedge \mathsf{empty}(\alpha) \\
&\overset{\text{Def.}}{\iff} \mathsf{nil}(\alpha \,|\, \beta).
\end{aligned}$$

Wir beweisen nun mittels struktureller Induktion, dass die Definition von $\mathsf{infinite}$ korrekt ist. Wir zeigen also $\mathsf{infinite}(\alpha) \iff |L(\alpha)| = |\mathbb{N}|$.

**Fall** $r = \emptyset$, $r = \mathsf{a}$, $r = \epsilon$. Trivial.

**Fall** $r = \alpha \,|\, \beta$.
Als Induktionshypothesen erhalten wir $|L(\alpha)| = |\mathbb{N}| \iff \mathsf{infinite}(\alpha)$ und $|L(\beta)| = |\mathbb{N}| \iff \mathsf{infinite}(\beta)$.

Es gilt

$$\begin{aligned}
|L(\alpha \,|\, \beta)| = |\mathbb{N}| &\iff |L(\alpha) \cup L(\beta)| = |\mathbb{N}| \\
&\iff |L(\alpha)| = |\mathbb{N}| \vee |L(\beta)| = |\mathbb{N}| \\
&\overset{\text{I.H.}}{\iff} \mathsf{infinite}(\alpha) \vee \mathsf{infinite}(\beta) \\
&\overset{\text{Def.}}{\iff} \mathsf{infinite}(\alpha \,|\, \beta).
\end{aligned}$$

**Fall** $r = \alpha\beta$.
Es gelten dieselben Induktionshypothesen wie im vorherigen Fall. Wir haben

$$\begin{aligned}
|L(\alpha\beta)| = |\mathbb{N}| &\iff |L(\alpha)L(\beta)| = |\mathbb{N}| \\
&\iff |L(\alpha)| = |\mathbb{N}| \wedge |L(\beta)| \neq 0 \vee |L(\beta)| = |\mathbb{N}| \wedge |L(\alpha)| \neq 0 \\
&\overset{\text{I.H.}}{\iff} \mathsf{infinite}(\alpha) \wedge |L(\beta)| \neq 0 \vee \mathsf{infinite}(\beta) \wedge |L(\alpha)| \neq 0 \\
&\iff \mathsf{infinite}(\alpha) \wedge \neg\mathsf{empty}(\beta) \vee \mathsf{infinite}(\beta) \wedge \neg\mathsf{empty}(\alpha) \\
&\overset{\text{Def.}}{\iff} \mathsf{infinite}(\alpha\beta).
\end{aligned}$$

**Fall** $r = \alpha^*$. Wir haben

$$\begin{aligned}
|L(\alpha^*)| = |\mathbb{N}| &\iff |L(\alpha)^*| = |\mathbb{N}| \\
&\iff L(\alpha)^* \neq \{\epsilon\} \\
&\iff \neg\mathsf{nil}(\alpha^*) \\
&\overset{\text{Def.}}{\iff} \mathsf{infinite}(\alpha^*).
\end{aligned}$$