

## Einführung in die Theoretische Informatik

### Sommersemester 2024 – Übungsblatt 1

- Das Übungsblatt ist in zwei Teile gegliedert: den Vorbereitungsteil, den Sie vor der Übung selbstständig bearbeiten sollen, und den Übungs-/Nachbereitungsteil, der Aufgaben enthält, die in der Übung besprochen werden und von Ihnen anschließend zur Nachbereitung verwendet werden können.
- Das ist nicht das Hausaufgabenblatt! Die Hausaufgaben finden Sie auf einem separaten Blatt.
- Für den Rest des Semesters gilt:  $\mathbb{N} := \mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \dots\}$  und  $\mathbb{N}_+ := \mathbb{N}_0 \setminus \{0\}$ .

### Vorbereitung (vor der Übung selbständig zu bearbeiten)

#### Vorbereitungsaufgabe Ü1.1. (Wichtige Begriffe)

Überprüfen Sie, dass Sie die folgenden Begriffe und Notationen korrekt definieren können.

- Alphabet  $\Sigma$ ;  $\Sigma^*$
- Wort  $w$ ,  $|w|$ ,  $\varepsilon$ ,  $ww$ ,  $w^n$
- formale Sprache  $A$ ;  $AA$ ,  $A^*$ ,  $A^+$
- reflexive transitive Hülle
- Grammatik  $G$ ;  $L(G)$
- Ableitungsrelation
- Chomsky-Hierarchie
- Wortproblem
- DFA
- Akzeptanzbedingung von DFAs

#### Vorbereitungsaufgabe Ü1.2. (Automata Tutor: Grammatiken und DFAs)

*Hinweis:* Diese Aufgabe wird mit [Automata Tutor](#) bearbeitet. AT ist ein Online-Tool, mit dem Sie zu vielen Themen aus dem THEO-Kurs Aufgaben bearbeiten können. Dabei bekommen Sie sogar automatisch individuelles Feedback! Dazu müssen Sie einen Account erstellen, und dann den Link verwenden, um sich in den Kurs einzuschreiben. Es gibt keine Verknüpfung zwischen AT und TUM-internen Systemen, sie können (sollten) also insbesondere ein anderes Passwort verwenden. AT wurde in den letzten Jahren signifikant überarbeitet — wir hoffen, dass es bereits in einem Zustand ist, Ihnen mit der Wiederholung des Materials zu helfen. Wenn Sie Bugs finden, melden Sie diese bitte auf Zulip.

Bitte registrieren Sie sich auf AT und lösen Sie die Aufgaben Ü1.2 (a–j). Sie haben beliebig viele Versuche.

#### Vorbereitungsaufgabe Ü1.3. (Sprachen)

Sei  $\Sigma = \{a, b\}$  ein Alphabet und  $W = \{aa, aaa, b\}$  eine Menge von Wörtern über  $\Sigma$ . Geben Sie, falls möglich, jeweils mindestens drei Wörter an, die innerhalb bzw. außerhalb der folgenden Sprachen liegen.

- (a)  $A := \{w \in W^* \mid |w| = 3\}$  (e)  $E := \{(ba^n b)^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$   
 (b)  $B := \{w \in \Sigma^* \mid \exists u \in \Sigma^*. \exists v \in W. w = uv\}$  (f)  $F := \{w \mid w \in W^2 \wedge w \in W^3\}$   
 (c)  $C := \{w \in \Sigma^* \mid \exists n \in \mathbb{N}_0. |w|_a = n \cdot |w|_b\}$  (g)  $G := W\emptyset$   
 (d)  $D := \{w \in \Sigma^* \mid \exists u \in \Sigma^*. uw = w^2 u\}$  (h)  $H := \{u \in \Sigma^* \mid \exists v \in \Sigma^*. (u, v) \in W \times \emptyset^*\}$

*Hinweis:* Mit  $|w|_a$  bezeichnen wir die Anzahl der  $a$ s in  $w$ .

*Lösungsskizze.*

- (a)  $aaa, aab, bbb \in A$ ;  $a, bb, aaab \in \Sigma^* \setminus A$  (e)  $\epsilon, bab, baabbaab \in E$ ;  
 $bb, baab, abba \in \Sigma^* \setminus E$   
 (b)  $aa, bbaa, bab \in B$ ;  $ba, aba, bba \in \Sigma^* \setminus B$  (f)  $F = \{a^6\}$ ;  $a, b, aaa \in \Sigma^* \setminus F$   
 (c)  $\epsilon, b, aaaabb \in C$ ;  $a, aa, aaabb \in \Sigma^* \setminus C$  (g)  $G = \emptyset$ ;  $a, aa, aaa \in \Sigma^* \setminus G$   
 (d)  $D = \{\epsilon\}$ ;  $a, b, aa \in \Sigma^* \setminus D$  (h)  $H = W$ ;  $a, ab, aab \in \Sigma^* \setminus H$

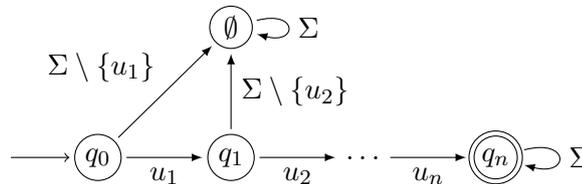
**Vorbereitungsaufgabe Ü1.4.** (DFA Konstruktionsideen)

Beschreiben Sie in eigenen Worten, wie man im Allgemeinen einen DFA konstruiert, der eine Sprache erkennt, die

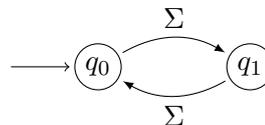
- (a) am Anfang jedes Wortes eine bestimmte Sequenz von Buchstaben fordert,  
 (b) alle Wörter gerader/ungerader Länge enthält,  
 (c) alle Wörter einer fixierten Länge  $n$  enthält,  
 (d) alle Wörter enthält, die an einer fixierten Position einen bestimmten Buchstaben enthalten.

*Lösungsskizze.*

- (a) Sei  $u_1, \dots, u_n$  die gewünschte Sequenz. Wir konstruieren den folgenden DFA:



- (b)

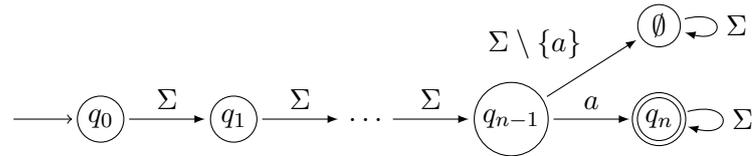


Wenn  $q_0$  zu einem Endzustand gemacht wird, akzeptiert dieser DFA genau alle Wörter gerader Länge. Wird hingegen  $q_1$  zum Endzustand gemacht, so akzeptiert er genau alle Wörter ungerader Länge.

- (c) Der folgende DFA akzeptiert genau alle Wörter der Länge  $n$ :



(d) Sei  $a$  der gewünschte Buchstabe an Stelle  $n$ .



## Übung und Nachbereitung

### Übungsaufgabe Ü1.5. (Grammatiken entwerfen)

Bestimmen Sie für jede der folgenden Sprachen eine passende Grammatik  $G$ , sodass  $L(G)$  genau die Sprache ist.

- (a)  $A := \{w \in \{0, 1\}^* : |w| \text{ gerade}\}$       (c)  $C := \{ww^R : w \in \{a, b\}^*\}$   
 (b)  $B := \{w \in \{0, 1\}^+ : (w)_2 \text{ gerade}\}$       (d)  $D := \{ww : w \in \{a, b\}^*\}$  (schwierig)

*Hinweise:*

- $(w)_2$  ist der Wert von  $w \in \{0, 1\}^*$  zur Basis 2, also z.B.  $(101010)_2 = 42$ .
- Wir bezeichnen mit  $w^R$  die Spiegelung von  $w$ , z.B.  $(abb)^R = bba$ ,  $\varepsilon^R = \varepsilon$ .
- Eine mögliche Lösung von Aufgabenteil (d) erweitert die Grammatik von Aufgabenteil (c) passend.

*Lösungsskizze.*

- (a)  $G := (\{S\}, \{0, 1\}, P, S)$  mit  $P: S \rightarrow 01S \mid 10S \mid 11S \mid 00S \mid \varepsilon$   
 (b)  $G := (\{S\}, \{0, 1\}, P, S)$  mit  $P: S \rightarrow 0S \mid 1S \mid 0$ . Lösung ohne führende Nullen:  
 $G = (\{S, X\}, \{0, 1\}, P, S)$  mit  $P: S \rightarrow 1X \mid 0 \quad X \rightarrow 0X \mid 1X \mid 0$   
 (c)  $G := (\{S\}, \{a, b\}, P, S)$  mit  $P: S \rightarrow aSa \mid bSb \mid \varepsilon$   
 (d) Hier zwei mögliche Ansätze zur Lösung:

1.  $G := (\{S, X, O, A, B\}, \{a, b\}, P, S)$  mit Produktionen  $P$  wie folgt

$$\begin{aligned} S &\rightarrow XO & O &\rightarrow \varepsilon & X &\rightarrow XaA \mid XbB \mid \varepsilon \\ Aa &\rightarrow aA & Ba &\rightarrow aB & AO &\rightarrow Oa \\ Ab &\rightarrow bA & Bb &\rightarrow bB & BO &\rightarrow Ob \end{aligned}$$

Wir schreiben alle Buchstaben des Wortes doppelt und verschieben  $A$  und  $B$  bis zum Ende (markiert mit  $O$ ) und wandeln dort das Zeichen wieder um.

2.  $G := (\{S, X, O, A, B, \vec{A}, \vec{B}\}, \{a, b\}, P, S)$  mit Produktionen  $P$  wie folgt

$$\begin{aligned} S &\rightarrow XO & O &\rightarrow \varepsilon & X &\rightarrow aXA \mid bXB \mid O \\ OA &\rightarrow O\vec{A} & \vec{A}A &\rightarrow A\vec{A} & \vec{A}B &\rightarrow B\vec{A} \\ OB &\rightarrow O\vec{B} & \vec{B}A &\rightarrow A\vec{B} & \vec{B}B &\rightarrow B\vec{B} \\ \vec{A}O &\rightarrow a & \vec{A}a &\rightarrow aa & \vec{A}b &\rightarrow ab \\ \vec{B}O &\rightarrow b & \vec{B}a &\rightarrow ba & \vec{B}b &\rightarrow bb \end{aligned}$$

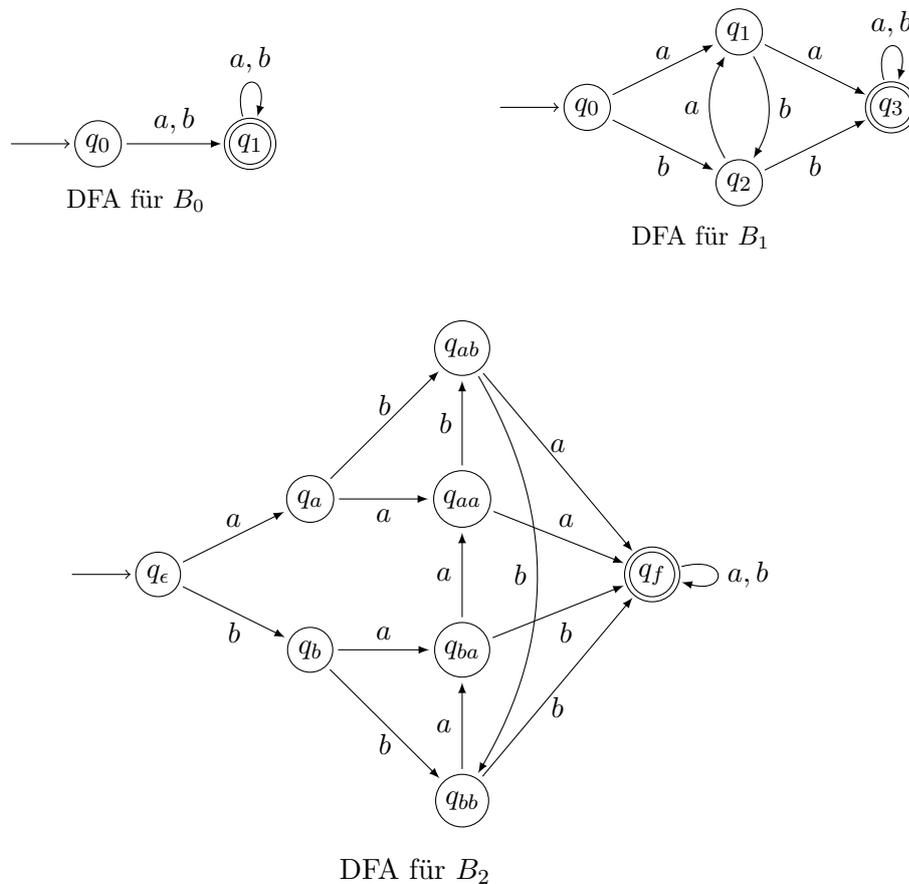
Wir erzeugen erst  $wOw^RO$  und verschieben dann alle Buchstaben von der Mitte beginnend an das Ende ( $O$ ).

### Übungsaufgabe Ü1.6. (Erinnere dich)

Sei  $\Sigma := \{a, b\}$  und  $B_n := \{w \in \Sigma^* \mid \exists i : w_i = w_{i+n}\}$  die Sprache aller Wörter über  $\Sigma$ , in denen an irgendeiner Stelle der gleiche Buchstabe im Abstand  $n$  vorkommt. Insbesondere ist  $B_0$  die Menge aller nichtleeren Wörter, und  $B_1$  die Menge aller Wörter, in denen ein Buchstabe zweimal hintereinander vorkommt. Versuchen Sie in allen Aufgabenteilen DFAs mit möglichst wenigen Zuständen anzugeben.

- Geben Sie jeweils einen DFA für  $B_0$ ,  $B_1$  und  $B_2$  an.
- Beschreiben Sie kurz, wie der DFA  $B_n$  für beliebige  $n \in \mathbb{N}$  aussieht.
- Beurteilen Sie die folgende Aussage: Jeder DFA zu  $B_n$  hat mindestens  $\Omega(2^n)$ -viele Zustände.

Lösungsskizze. (a):



- Der DFA besteht aus einem Start- und einem Endzustand, sowie  $n$  "Spalten" zwischen diesen Zuständen. Zunächst liest der DFA  $n$  Zeichen ein und bewegt sich dabei in die jeweils nächste Spalte. Dabei merkt sich der DFA immer die letzten  $n$  Zeichen, die er gelesen hat, in seinem Zustand. In der  $n$ -ten Spalte verbleibt der Automat dann, bis entweder das Wort zu Ende ist (Wort wird abgelehnt) oder der nächste Buchstabe den ersten im Zustand gespeicherten Buchstaben entspricht (Wort wird akzeptiert).

- (c) Die Aussage ist korrekt. Der Beweis ist ähnlich zu dem Beweis in den Vorlesungsfolien zur Sprache  $L_k$ . (Lemma 3.12)

**Übungsaufgabe Ü1.7.** (Endlich gibt es Beweise)

Sei  $\Sigma$  ein Alphabet und  $A, B, C \subseteq \Sigma^*$  beliebig. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Geben Sie für korrekte Aussagen einen Beweis an und widerlegen Sie falsche mithilfe eines geeigneten Gegenbeispiels. Zeigen Sie auch die Korrektheit ihres Gegenbeispiels.

- (a)  $A^* = A^+$  genau dann wenn (gdw.)  $\varepsilon \in A$   
 (b)  $A(B \cap C) = AB \cap AC$   
 (c) Falls  $A \subseteq B$ , dann  $A^n \subseteq B^n$  für jedes  $n \in \mathbb{N}_0$ .  
 (d) Unter der Annahme  $A \neq \emptyset$  gilt:  $A = AA$  gdw.  $A = A^*$ .

*Lösungsskizze.* Zu dieser Aufgabe gibt es auch Videolösungen: (a), (b), (c), (d)

- (a) Die Aussage ist wahr. Wir zeigen beide Richtungen der Aussage getrennt.

$\Leftarrow$ : Annahme  $\varepsilon \in A$ . Dann gilt  $A = \{\varepsilon\} \cup A = A^0 \cup A$ . Per Definition gilt

$$A^+ = \bigcup_{n \geq 1} A^n = A \cup \bigcup_{n \geq 2} A^n = A^0 \cup A \cup \bigcup_{n \geq 2} A^n = \bigcup_{n \geq 0} A^n = A^*.$$

■

$\Rightarrow$ : Annahme  $A^* = A^+$ . Da  $\varepsilon \in A^*$ , muss auch  $\varepsilon \in A^+$  gelten. Nach Vorlesung gilt  $A^+ = AA^+$ , also folgt  $\varepsilon \in AA^+$ . Also gibt es  $u \in A$  und  $v \in A^+$  mit  $\varepsilon = uv$ . Daraus folgt  $u = \varepsilon$  und  $v = \varepsilon$ . Da  $u \in A$  gilt, ist  $\varepsilon \in A$  gezeigt.  $\square$

- (b) Die Aussage ist falsch. Wähle  $A = \{a, aa\}$ ,  $B = \{b\}$  und  $C = \{ab\}$ . Dann gilt

$$A(B \cap C) = A\emptyset = \emptyset \neq \{aab\} = \{ab, aab\} \cap \{aab, aaab\} = AB \cap AC.$$

- (c) Die Aussage ist wahr. Annahme (Ann.)  $A \subseteq B$ . Wir zeigen die Aussage per Induktion über  $n$ . Für den Fall  $n = 0$  gilt  $A^0 = \{\varepsilon\} = B^0$ . Im Fall  $n + 1$  gilt  $A^n \subseteq B^n$  per Induktionshypothese (IH). Sei nun  $w \in A^{n+1}$  beliebig. Es gilt  $w \in A^{n+1} = AA^n = \{uv \mid u \in A \text{ und } v \in A^n\}$ . Das heißt es gibt  $u \in A \stackrel{\text{Ann.}}{\subseteq} B$  und  $v \in A^n \stackrel{\text{IH}}{\subseteq} B^n$  mit  $w = uv$ . Somit  $w = uv \in BB^n = B^{n+1}$ .  $\square$

- (d) Die Aussage ist wahr. Annahme  $A \neq \emptyset$ . Wir zeigen beide Richtungen der Aussage getrennt.

$\Leftarrow$ : Annahme  $A = A^*$ . Wir zeigen  $A^* = A^*A^*$ . Da  $\varepsilon \in A^*$  gilt  $A^* = \{\varepsilon\}A^* \subseteq A^*A^*$ . Sei nun  $w \in A^*A^*$ . Dann existieren nach Definition  $u, v \in A^*$  mit  $w = uv$ . Weiterhin existieren  $u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n \in A$  mit  $m, n \in \mathbb{N}$  sodass  $u = u_1 \cdots u_m$  und  $v = v_1 \cdots v_n$ . Somit  $w = u_1 \cdots u_m v_1 \cdots v_n \in A^{m+n} \subseteq A^*$  und damit  $A^*A^* \subseteq A^*$ . Insgesamt also  $A^* = A^*A^* \stackrel{\text{Ann.}}{=} AA$ .  $\blacksquare$

$\Rightarrow$ : Annahme  $A = AA$ . Nach Definition gilt  $A \subseteq A^*$ . Bleibt noch  $A^* \subseteq A$  zu zeigen. Aufgrund der Definition von  $A^*$  reicht es  $A^n \subseteq A$  für  $n \in \mathbb{N}$  zu zeigen. Wir zeigen die Aussage per Induktion über  $n$ .

Im Fall  $n = 0$  gilt es  $A^0 = \{\varepsilon\} \subseteq A$  zu zeigen. Sei hierfür  $w \in A = AA$  ein kürzestes Wort. Dann lässt sich  $w$  in zwei Wörter  $u, v \in A$  mit  $|w| = |u| + |v|$  faktorisieren. Da  $w$  ein kürzestes Wort ist, gilt  $|w| \leq |u|$  und  $|w| \leq |v|$ . Somit  $|w| = |u| = |v| = 0$ , also  $w = \varepsilon$ .

Im Fall  $n + 1$  folgt  $A^{n+1} = AA^n \stackrel{\text{IH}}{\subseteq} AA \stackrel{\text{Ann.}}{=} A$ . □