

Einführung in die Theoretische Informatik

Sommersemester 2024 – Übungsblatt 1

- Das Übungsblatt ist in zwei Teile gegliedert: den Vorbereitungsteil, den Sie vor der Übung selbstständig bearbeiten sollen, und den Übungs-/Nachbereitungsteil, der Aufgaben enthält, die in der Übung besprochen werden und von Ihnen anschließend zur Nachbereitung verwendet werden können.
- Das ist nicht das Hausaufgabenblatt! Die Hausaufgaben finden Sie auf einem separaten Blatt.
- Für den Rest des Semesters gilt: $\mathbb{N} := \mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \dots\}$ und $\mathbb{N}_+ := \mathbb{N}_0 \setminus \{0\}$.

Vorbereitung (vor der Übung selbstständig zu bearbeiten)

Vorbereitungsaufgabe Ü1.1. (Wichtige Begriffe)

Überprüfen Sie, dass Sie die folgenden Begriffe und Notationen korrekt definieren können.

- Alphabet Σ ; Σ^*
- Wort w , $|w|$, ε , ww , w^n
- formale Sprache A ; AA , A^* , A^+
- reflexive transitive Hülle
- Grammatik G ; $L(G)$
- Ableitungsrelation
- Chomsky-Hierarchie
- Wortproblem
- DFA
- Akzeptanzbedingung von DFAs

Vorbereitungsaufgabe Ü1.2. (Automata Tutor: Grammatiken und DFAs)

Hinweis: Diese Aufgabe wird mit [Automata Tutor](#) bearbeitet. AT ist ein Online-Tool, mit dem Sie zu vielen Themen aus dem THEO-Kurs Aufgaben bearbeiten können. Dabei bekommen Sie sogar automatisch individuelles Feedback! Dazu müssen Sie einen Account erstellen, und dann den Link verwenden, um sich in den Kurs einzuschreiben. Es gibt keine Verknüpfung zwischen AT und TUM-internen Systemen, sie können (sollten) also insbesondere ein anderes Passwort verwenden. AT wurde in den letzten Jahren signifikant überarbeitet — wir hoffen, dass es bereits in einem Zustand ist, Ihnen mit der Wiederholung des Materials zu helfen. Wenn Sie Bugs finden, melden Sie diese bitte auf Zulip.

Bitte registrieren Sie sich auf AT und lösen Sie die Aufgaben Ü1.2 (a–j). Sie haben beliebig viele Versuche.

Vorbereitungsaufgabe Ü1.3. (Sprachen)

Sei $\Sigma = \{a, b\}$ ein Alphabet und $W = \{aa, aaa, b\}$ eine Menge von Wörtern über Σ . Geben Sie, falls möglich, jeweils mindestens drei Wörter an, die innerhalb bzw. außerhalb der folgenden Sprachen liegen.

- (a) $A := \{w \in W^* \mid |w| = 3\}$ (e) $E := \{(ba^nb)^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$
 (b) $B := \{w \in \Sigma^* \mid \exists u \in \Sigma^*. \exists v \in W. w = uv\}$ (f) $F := \{w \mid w \in W^2 \wedge w \in W^3\}$
 (c) $C := \{w \in \Sigma^* \mid \exists n \in \mathbb{N}_0. |w|_a = n \cdot |w|_b\}$ (g) $G := W\emptyset$
 (d) $D := \{w \in \Sigma^* \mid \exists u \in \Sigma^*. uw = w^2u\}$ (h) $H := \{u \in \Sigma^* \mid \exists v \in \Sigma^*. (u, v) \in W \times \emptyset^*\}$

Hinweis: Mit $|w|_a$ bezeichnen wir die Anzahl der a s in w .

Vorbereitungsaufgabe Ü1.4. (DFA Konstruktionsideen)

Beschreiben Sie in eigenen Worten, wie man im Allgemeinen einen DFA konstruiert, der eine Sprache erkennt, die

- am Anfang jedes Wortes eine bestimmte Sequenz von Buchstaben fordert,
- alle Wörter gerader/ungerader Länge enthält,
- alle Wörter einer fixierten Länge n enthält,
- alle Wörter enthält, die an einer fixierten Position einen bestimmten Buchstaben enthalten.

Übung und Nachbereitung

Übungsaufgabe Ü1.5. (Grammatiken entwerfen)

Bestimmen Sie für jede der folgenden Sprachen eine passende Grammatik G , sodass $L(G)$ genau die Sprache ist.

- (a) $A := \{w \in \{0, 1\}^* : |w| \text{ gerade}\}$ (c) $C := \{ww^R : w \in \{a, b\}^*\}$
 (b) $B := \{w \in \{0, 1\}^+ : (w)_2 \text{ gerade}\}$ (d) $D := \{ww : w \in \{a, b\}^*\}$ (schwierig)

Hinweise:

- $(w)_2$ ist der Wert von $w \in \{0, 1\}^*$ zur Basis 2, also z.B. $(101010)_2 = 42$.
- Wir bezeichnen mit w^R die Spiegelung von w , z.B. $(abb)^R = bba$, $\varepsilon^R = \varepsilon$.
- Eine mögliche Lösung von Aufgabenteil (d) erweitert die Grammatik von Aufgabenteil (c) passend.

Übungsaufgabe Ü1.6. (Erinnere dich)

Sei $\Sigma := \{a, b\}$ und $B_n := \{w \in \Sigma^* \mid \exists i : w_i = w_{i+n}\}$ die Sprache aller Wörter über Σ , in denen an irgendeiner Stelle der gleiche Buchstabe im Abstand n vorkommt. Insbesondere ist B_0 die Menge aller nichtleeren Wörter, und B_1 die Menge aller Wörter, in denen ein Buchstabe zweimal hintereinander vorkommt. *Versuchen Sie in allen Aufgabenteilen DFAs mit möglichst wenigen Zuständen anzugeben.*

- Geben Sie jeweils einen DFA für B_0 , B_1 und B_2 an.
- Beschreiben Sie kurz, wie der DFA B_n für beliebige $n \in \mathbb{N}$ aussieht.
- Beurteilen Sie die folgende Aussage: *Jeder DFA zu B_n hat mindestens $\Omega(2^n)$ -viele Zustände.*

Übungsaufgabe Ü1.7. (*Endlich gibt es Beweise*)

Sei Σ ein Alphabet und $A, B, C \subseteq \Sigma^*$ beliebig. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Geben Sie für korrekte Aussagen einen Beweis an und widerlegen Sie falsche mithilfe eines geeigneten Gegenbeispiels. Zeigen Sie auch die Korrektheit ihres Gegenbeispiels.

- (a) $A^* = A^+$ genau dann wenn (gdw.) $\varepsilon \in A$
- (b) $A(B \cap C) = AB \cap AC$
- (c) Falls $A \subseteq B$, dann $A^n \subseteq B^n$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$.
- (d) Unter der Annahme $A \neq \emptyset$ gilt: $A = AA$ gdw. $A = A^*$.