Prof. Javier Esparza
Philipp Czerner, Kevin Kappelmann, Valentin Krasotin

Technische Universität München
Lehrstuhl für Theoretische Informatik

Einführung in die Theoretische Informatik

Sommersemester 2024 – Quiz 13

Frage Q13.1. (*zu H13.2*) 2 Punkte

Einfachauswahl. Welche Sprachen können von PDAs über einem Alphabet Σ mit Finalzuständen akzeptiert werden, bei denen $|\alpha| = 1$ für jede Transition $(q', \alpha) \in \delta(q, a, Z)$ gilt, der PDA also immer genau ein Zeichen auf den Keller schreibt?

(a) ✓ Die regulären Sprachen über Σ

(b) ✗ Die kontextfreien Sprachen über Σ

(c) ✗ Die endlichen Sprachen über Σ

(d) ✗ Die Sprachen $L \subseteq \Sigma$

Lösungsskizze. Der Keller hat hier immer Größe 1 (siehe Ü7.8b).

Frage Q13.2. (*zu H13.2*) 1 Punkt

Wahr/falsch. ✗ Seien $M_1 = (Q, \Sigma, \delta, q_{01}, F)$, $M_2 = (Q, \Sigma, \delta, q_{02}, F)$ zwei beliebige DFAs, die sich nur in ihrem Startzustand unterscheiden, mit $q_{01} \neq q_{02}$ und $L(M_1) = L(M_2)$. Gibt es solche M_1, M_2, die zusätzlich minimal sind? Wenn ja, geben Sie ein Beispiel an, wenn nein, begründen Sie dies kurz.

Lösungsskizze. Nein, die DFAs sind nie minimal, da die Zustände q_{01}, q_{02} äquivalent sind:

$$\delta(q_{01}, w) \in F \Leftrightarrow w \in L(M_1) \Leftrightarrow w \in L(M_2) \Leftrightarrow \delta(q_{02}, w) \in F$$

Frage Q13.3. (*zu H13.2*) 2 Punkte

Mehrfachauswahl. Für welche kontextfreie Grammatik G gilt, dass jeder PDA für $L(G)$, der über leeren Keller akzeptiert, mindestens 2 Zustände hat?

(a) ✓ Ein solches G gibt es nicht.

(b) ✗ $S \to \varepsilon$

(c) ✗ $S \to a \mid ab$

Lösungsskizze. Die Prozedur aus der Vorlesung, um eine kontextfreie Grammatik zu einem PDA zu konvertieren, erzeugt immer PDAs mit einem Zustand, der über leeren Keller akzeptiert.

Frage Q13.4. (*zu H13.2*) 1 Punkt

Wahr/falsch. ✓ Gibt es eine endliche Menge $M \subset \mathbb{N}$ und einen regulären Ausdruck r mit $L(r) = \{a^n : n \in M\}$ und $|r| < \sum_{i \in M} i$? Falls ja, geben Sie ein Beispiel an, falls nein, begründen Sie dies kurz.

Lösungsskizze. Z.B. $M := \{5, 6\}$ und $r := aaaaa(\boldsymbol{\epsilon} \mid a)$.

Frage Q13.5. (*zu H13.2*) 2 Punkte

Mehrfachauswahl. Sei $\Sigma := \{a, b\}$. Sei $N_k \in \mathbb{N}$ die Anzahl an Sprachen, die von DFAs über Σ mit $k \in \mathbb{N}$ Zuständen akzeptiert werden. Welche Aussagen sind wahr?

(a) ✓ $N_k \geq 2^k$

(b) ✗ $N_k \leq k^2$

Lösungsskizze.

(a) Wir betrachten einen DFA mit Zuständen $\{1, ..., k\}$ und Transitionen $\delta(i, a) = i+1$ für $i \in \{1, ..., k-1\}$. Für jede mögliche Wahl an Finalzuständen akzeptiert dieser DFA eine andere Sprache, und somit gibt es mindestens 2^k verschiedene.

(b) Ein einfaches Gegenbeispiel ist $N_1 = 2$. Außerdem wissen wir bereits, dass (a) wahr ist. Also kann die Schranke nicht gelten.

Frage Q13.6. (*zu H13.2*) 2 Punkte

Wahr/falsch. ✗ Sei $L \subseteq \{a, b\}^*$ beliebig. L ist entscheidbar, wenn L^a entscheidbar ist. Hier bezeichnet $L^a := \{w : aw \in L\}$ die Residualsprache bezüglich a von L.

Lösungsskizze. Gegenbeispiel: $L := \{b\}\mathcal{H}_0$, wobei $\mathcal{H}_0$ das Halteproblem auf leerem Band ist (mit a, b statt $0, 1$). Dann ist $L^a = \emptyset$, aber L ist offensichtlich unentscheidbar.

Frage Q13.7. (*zu H13.2*) 1 Punkt

Wahr/falsch. ✓ Sei L entscheidbar. Dann ist $\{w \mid \exists v : wv \in L\}$ semi-entscheidbar.

Lösungsskizze. Wir iterieren über alle Wörter v und überprüfen $wv \in L$.

Frage Q13.8. (*zu H13.2*) 2 Punkte

Mehrfachauswahl. Welche der folgenden Sprachen sind regulär?

(a) ✓ $\{w : L(M_w) \text{ endlich } \wedge |L(M_w)|^2 = 1000\}$

(b) ✗ $\{w : L(M_w) \text{ endlich } \wedge |L(M_w)|^2 = 100\}$

Lösungsskizze. (a) ist die leere Menge (da 1000 kein Quadratzahl ist) und somit regulär. (b) Ist nach Satz von Rice unentscheidbar, und somit nicht regulär.

Frage Q13.9. (*zu H13.2*) 1 Punkt

Wahr/falsch. ✓ Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die Sprache $L_n := \{w : |w| < 2^n\}$ in NP.

Lösungsskizze. Die Sprache ist endlich, und alle endlichen Sprachen sind sogar in P.

Frage Q13.10. (*zu H13.2*) 1 Punkt

Wahr/falsch. ✗ Wenn $A \leq_p B$ und $A \in \mathsf{NP}$, dann ist auch $B \in \mathsf{NP}$.

Lösungsskizze. Gegenbeispiel: $A := \emptyset$ und $B := \mathcal{H}_0$.

Frage Q13.11. (*zu H13.2*) 2 Punkte

Wahr/falsch. ✓ Sei $L \in \mathsf{NP}$ und f in polynomieller Zeit auf einer DTM berechenbar. Dann ist $L' := \{w : f(w) \in L\} \in \mathsf{NP}$.

Lösungsskizze. Eine NTM kann L' entscheiden, indem sie zunächst f berechnet und dann überprüft, ob das Wort in L' ist. Falls $f(w)$ nicht definiert ist, hält die NTM auf dem Wort nicht, aber für $w \notin L'$ ist das erlaubt.

Frage Q13.12. (*zu H13.2*) 1 Punkt

Wahr/falsch. ✓ Sei $L \subseteq \{0,1\}^*$ entscheidbar und M eine DTM, die L entscheidet. Dann ist $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ `WHILE`-berechenbar, wobei $f(n)$ die Anzahl der Schritte bezeichnet, die M auf Eingabe 0^n tätigt, oder 0, falls M auf 0^n nicht terminiert.

Lösungsskizze. `WHILE`-berechenbar ist äquivalent zu berechenbar, und wir wissen, dass M auf allen Eingaben terminiert. Also simulieren wir M auf der entsprechenden Eingabe und zählen die Schritte.