Prof. Javier Esparza
Philipp Czerner, Kevin Kappelmann, Valentin Krasotin

Technische Universität München
Lehrstuhl für Theoretische Informatik

Einführung in die Theoretische Informatik

Sommersemester 2024 – Quiz 11

Frage Q11.1. (*zu H11.3*) 1 Punkt

Mehrfachauswahl. Sei L unentscheidbar und $w \in L$. Welche der folgenden Sprachen sind unentscheidbar?

(a) ✗ $\{w\}$

(b) ✗ $\{v : v \in L(M_w)\}$

(c) ✓ $\{v : w \in L(M_v)\}$

Lösungsskizze.

(a) Diese Menge ist immer entscheidbar, da sie endlich ist.

(b) Dies entspricht der Sprache aus H11.3a.

(c) Satz von Rice.

Frage Q11.2. (*zu H11.3*) 1 Punkt

Mehrfachauswahl. Seien $L_1, L_2 \subseteq \{0,1\}^*$ unentscheidbar. Welche der folgenden Sprachen sind unentscheidbar?

(a) ✗ $L_1 \cap L_2$

(b) ✓ $L_1\{\$\}L_2$

Lösungsskizze.

(a) Gegenbeispiel: L_1 ist eine beliebige unentscheidbare Menge (z.B. $L_1 := \mathcal{H}_0$), und $L_2 := \overline{L_1}$.

(b) Sei $w \in L_2$ beliebig (das Wort existiert, da $\emptyset$ entscheidbar ist). Dann können wir von L_1 auf $L_1\{\$\}L_2$ reduzieren, indem wir x auf $x\$w$ abbilden.

Frage Q11.3. (*zu H11.3*) 1 Punkt

Mehrfachauswahl. Seien $L_1 \subseteq \{0,1\}^*$ entscheidbar und $L_2 \subseteq \{0,1\}^*$ unentscheidbar. Welche der folgenden Sprachen sind unentscheidbar?

(a) ✗ $L_1 \cap L_2$

(b) ✗ $L_1 \cup L_2$

(c) ✓ $L_1 \Delta L_2$ (Dies ist die symmetrische Differenz, also $L_1 \Delta L_2 = (L_1 \cup L_2) \setminus (L_1 \cap L_2)$.)

Lösungsskizze.

(a) Gegenbeispiel: $L_1 := \emptyset$, L_2 eine beliebige unentscheidbare Menge (z.B. $L_2 := \mathcal{H}_0$)

(b) Gegenbeispiel: $L_1 := \Sigma^*$, L_2 eine beliebige unentscheidbare Menge (z.B. $L_2 := \mathcal{H}_0$)

(c) Sei $L := L_1 \Delta L_2$. Wenn L entscheidbar ist, dann muss es auch $L \Delta L_1 = L_2$ sein (nach Abschlusseigenschaften entscheidbarer Sprachen). Das ist aber ein Widerspruch.

Frage Q11.4. (*zu H11.3*) 1 Punkt

Mehrfachauswahl. Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ total und berechenbar. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(a) ✓ Wenn f injektiv ist, gibt es eine berechenbare partielle Funktion $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $g(f(x)) = x$.

(b) ✓ Wenn f surjektiv ist, gibt es eine berechenbare partielle Funktion $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(g(x)) = x$.

Lösungsskizze.

(a) Auf Eingabe x geht g alle $y \in \mathbb{N}$ durch, um eines mit $f(y) = x$ zu finden. Da f injektiv ist, gibt es nur ein mögliches y. Dieses y geben wir aus. Falls es kein solches y gibt, terminiert der Algorithmus nicht, und $g(y) = \perp$.

(b) Auf Eingabe x geht g alle $y \in \mathbb{N}$ durch, um eines mit $f(y) = x$ zu finden. Da f surjektiv ist, existiert so ein y, und da f berechenbar ist, können wir $f(y)$ berechnen. Dieses y gibt g aus.

Frage Q11.5. (*zu H11.3*) 1 Punkt

Mehrfachauswahl. Seien $L_1, L_2 \subseteq \{0,1\}^*$ semi-entscheidbar. Welche der folgenden Sprachen sind semi-entscheidbar?

(a) ✓ $L_1 \cap L_2$

(b) ✓ $L_1 \cup L_2$

(c) ✗ $L_1 \Delta L_2$ (Dies ist die symmetrische Differenz, also $L_1 \Delta L_2 = (L_1 \cup L_2) \setminus (L_1 \cap L_2)$.)

Lösungsskizze. Sei M_i eine TM mit $L(M_i) = L_i$, für $i = 1, 2$.

(a) Wir lassen M_1 und M_2 hintereinander laufen, und akzeptieren, wenn beide terminieren.

(b) Wir lassen M_1 und M_2 gleichzeitig laufen, und akzeptieren, wenn eine davon terminiert.

(c) Gegenbeispiel: $L_1 = \mathcal{H}_0$ und $L_2 = \Sigma^*$. Dann ist $L_1 \Delta L_2 = \overline{\mathcal{H}_0}$, was nicht semi-entscheidbar ist.

Frage Q11.6. (*zu H11.3*) 1 Punkt

Mehrfachauswahl. Sei M eine TM. Welche der folgenden Sprachen sind semi-entscheidbar? (Hier bedeutet $M[w]{\downarrow}n$, dass M auf Eingabe w in genau n Schritten hält.)

(a) ✓ $L(M')$, wobei M' eine TM ist, die zunächst die Eingabe löscht und dann M ausführt.

(b) ✓ $\{w : M[w]{\downarrow}n \text{ für ein } n \geq 2022\}$

(c) ✓ $\{\text{bin}(n) : M[w]{\downarrow}n \text{ für ein } w\}$

Lösungsskizze.

(a) $L(N)$ ist für jede TM N semi-entscheidbar.

(b) Wir lassen M auf w laufen bis es terminiert. Falls M in mehr als 2022 Schritten terminiert, akzeptieren wir.

(c) Wir gehen alle Wörter w durch, und überprüfen $M[w]{\downarrow}n$.

Frage Q11.7. (*zu H11.3*) 1 Punkt

Mehrfachauswahl. Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Welche Aussagen sind wahr?

(a) ✓ Wenn f monoton fallend ist, ist f berechenbar.

(b) ✗ Wenn f monoton steigend ist, ist f berechenbar.

Lösungsskizze.

(a) Ja, denn f lässt sich als endliche (!) Folge natürlicher Zahlen kodieren. Insbesondere gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $f(n) = f(m)$ für alle $m \geq n$.

(b) Für ein solches f kann $S := \{n : f(n) < f(n+1)\} \subseteq \mathbb{N}$ eine beliebige Teilmenge von $\mathbb{N}$ sein. (Insbesondere gibt es für jede Teilmenge ein f, das sie erzeugt.) Also gibt es überabzählbar viele mögliche f, und es können nicht alle berechenbar sein.

Frage Q11.8. (*zu H11.3*) 1 Punkt

Mehrfachauswahl. Sei L unentscheidbar. Welche der folgenden Sprachen sind entscheidbar?

(a) ✓ $\{w : \varphi_w = \chi_L\}$

(b) ✗ $\{w : L(M_w) \subseteq L\}$

(c) ✓ $\{w \mid \exists v \in L : |v| \geq |w|\}$

Lösungsskizze.

(a) Dies ist einfach $\emptyset$ (da eine unentscheidbare Sprache von keiner TM entschieden wird)

(b) Diese Sprache ist sogar für jedes L unentscheidbar (Satz von Rice)

(c) Da L unentscheidbar ist, muss es auch unendlich sein. Also ist dies einfach Σ^*.