Prof. Javier Esparza
Philipp Czerner, Kevin Kappelmann, Valentin Krasotin

Technische Universität München
Lehrstuhl für Theoretische Informatik

Einführung in die Theoretische Informatik

Sommersemester 2024 – Quiz 10

Frage Q10.1. (*zu H10.3*) 1 Punkt

Mehrfachauswahl. Welche der folgenden Mengen sind abzählbar?

(a) ✓ $\{f \mid f : \{0,1\} \to \mathbb{N}\}$
(also die Funktionen mit Definitionsbereich $\{0,1\}$ und Wertebereich $\mathbb{N}$)

(b) ✗ $\{f \mid f : \mathbb{N} \to \{0,1\}\}$
(also die Funktionen mit Definitionsbereich $\mathbb{N}$ und Wertebereich $\{0,1\}$)

Lösungsskizze.

(a) Jede dieser Funktionen entspricht einem Paar $(f(0), f(1)) \in \mathbb{N}^2$, und $\mathbb{N}^2$ ist abzählbar.

(b) Hier entspricht jede Funktion einer Teilmenge $S \subseteq \mathbb{N}$ (über $S := \{x : f(x) = 1\}$), und davon gibt es überabzählbar viele.

Frage Q10.2. (*zu H10.3*) 1 Punkt

Mehrfachauswahl. Sei $\Sigma := \{0,1\}$. Welche der folgenden Mengen sind entscheidbar?

(a) ✓ $\{01\}^*$

(b) ✗ $\{w \in \Sigma^* : L(M_w) = \{01\}^*\}$

Lösungsskizze.

(a) Jede reguläre Sprache ist entscheidbar.

(b) Satz von Rice.

Angabe. Aussagen, die $|\varphi_w(x)|$ verwenden, betrachten wir implizit als falsch, wenn $\varphi_w(x)$ nicht definiert ist. Dies betrifft sowohl die nächste als auch die folgenden Fragen.

Frage Q10.3. (*zu H10.3*) 1 Punkt

Mehrfachauswahl. Sei $\Sigma := \{0,1\}$. Welche der folgenden Mengen sind entscheidbar?

(a) ✓ $\{w \in \Sigma^* : |\varphi_w(w)|^2 = 7\}$

(b) ✓ $\{w \in \Sigma^* : M_w[\varepsilon]\!\downarrow \wedge\, |w| \leq 7\}$

(c) ✗ $\{w \in \Sigma^* : |L(M_w)| > 5\}$

Lösungsskizze.

(a) Die Menge ist leer, also entscheidbar.

(b) Die Menge ist endlich, also entscheidbar. (Der Satz von Rice ist nicht anwendbar, da $|w| \leq 7$ keine semantische Eigenschaft ist.)

(c) Satz von Rice.

Frage Q10.4. *(zu H10.3)* 1 Punkt

Mehrfachauswahl. Sei $\Sigma := \{0, 1\}$. Auf welche der folgenden Sprachen lässt sich der Satz von Rice anwenden?

(a) ✓ $\{w \in \Sigma^* : |\varphi_w(x)| = 42 \text{ für alle } x \in \mathbb{N}\}$

(b) ✓ $\{w \in \Sigma^* : (|\varphi_w(x)| - 5)^2 \geq 3 \text{ für alle } x \in \mathbb{N}\}$

(c) ✗ $\{w \in \Sigma^* : (|\varphi_w(x)| - 5)^2 = |w| \text{ für alle } x \in \mathbb{N}\}$

Lösungsskizze. (c) ist keine semantische Eigenschaft, da es von der Länge der Kodierung der TM abhängt.

Frage Q10.5. *(zu H10.3)* 1 Punkt

Mehrfachauswahl. Sei $\Sigma := \{0, 1\}$. Welche der folgenden Mengen sind für alle $v \in \Sigma^*$ entscheidbar?

(a) ✗ $\{w \in \Sigma^* : M_w[v]\downarrow\}$

(b) ✗ $\{w \in \Sigma^* : M_v[w]\downarrow\}$

(c) ✓ $\{w \in \Sigma^* : M_v[v]\downarrow\}$

Lösungsskizze.

(a) Gegenbeispiel: $v = \varepsilon$, dann ist dies $\mathcal{H}_0$, das Halteproblem auf leerem Band.

(b) Gegenbeispiel: v ist eine universelle TM, die die Eingabe als Kodierung einer TM interpretiert und auf dem leeren Band ausführt. Damit wird dies auch zu $\mathcal{H}_0$.

(c) Die Menge ist Σ^* oder $\emptyset$.

Frage Q10.6. *(zu H10.3)* 1 Punkt

Mehrfachauswahl. Sei $\Sigma := \{0, 1\}$. Für welche der folgenden Mengen gibt es ein $v \in \Sigma^*$, sodass sie entscheidbar sind?

(a) ✗ $\{w \in \Sigma^* : M_w[v]\downarrow\}$

(b) ✓ $\{w \in \Sigma^* : M_v[w]\downarrow\}$

(c) ✓ $\{w \in \Sigma^* : M_v[v]\downarrow\}$

Lösungsskizze.

(a) Diese Sprache ist unabhängig von v unentscheidbar, nach Satz von Rice.

(b) Gegenbeispiel: v ist die Kodierung einer TM, die nie hält. Die Sprache ist dann leer und somit entscheidbar.

(c) Wie eben: die Menge ist Σ^* oder $\emptyset$.

Frage Q10.7. *(zu H10.3)* 1 Punkt

Mehrfachauswahl. Sei $\Sigma := \{0, 1\}$. Welche der folgenden Sprachen sind semi-entscheidbar?

(a) ✗ $\{w \in \Sigma^* : L(M_w) \subseteq \Sigma^{2022}\}$

(b) ✗ $\{w \in \Sigma^* : L(M_w) = \Sigma^{2022}\}$

(c) ✓ $\{w \in \Sigma^* : L(M_w) \supseteq \Sigma^{2022}\}$

Lösungsskizze.

(a,b) Wir reduzieren $\overline{\mathcal{H}_0}$, indem wir w auf die Kodierung v einer TM abbilden, die jede Eingabe $x \in \Sigma^{2022}$ akzeptiert, und auf jeder anderen Eingabe $M_w[\varepsilon]$ ausführt. Wenn $w \in \overline{\mathcal{H}_0}$, dann gilt $L(M_v) = \Sigma^{2022}$ (und somit auch $L(M_v) \subseteq \Sigma^{2022}$), ansonsten $L(M_v) = \Sigma^*$.

(c) Wir müssen nur überprüfen, dass $L(M_w)$ auf allen Wörtern in Σ^{2022} hält.

Frage Q10.8. (*zu H10.3*) 1 Punkt

Mehrfachauswahl. Sei $\Sigma := \{0, 1\}$. Welche der folgenden Sprachen sind rekursiv aufzählbar?

(a) ✓ $\{w \in \Sigma^* : M_w$ hält auf (mindestens) 5 Eingaben$\}$

(b) ✗ $\{w \in \Sigma^* : M_w$ hält auf höchstens 5 Eingaben$\}$

Lösungsskizze. Rekursiv aufzählbar ist äquivalent zu semi-entscheidbar, also argumentieren wir letzteres.

(a) Wir lassen M_w auf allen Eingaben „gleichzeitig" laufen. Formal gehen wir alle Wörter $(x_1, ..., x_5) \in (\Sigma^*)^5$ durch, und überprüfen, dass $x_1, ..., x_5$ paarweise verschieden sind und $M_w[x_1]\downarrow \wedge ... \wedge M_w[x_5]\downarrow$.

(b) Wir reduzieren wieder $\overline{\mathcal{H}_0}$, indem wir w auf die Kodierung einer TM abbilden, die ihre Eingabe löscht und M_w ausführt.