Prof. Javier Esparza
Philipp Czerner, Kevin Kappelmann, Valentin Krasotin

Technische Universität München
Lehrstuhl für Theoretische Informatik

Einführung in die Theoretische Informatik

Sommersemester 2024 – Quiz 8

Angabe. Wir wollen beweisen, dass die Sprache L (aus H8.4) nicht kontextfrei ist, indem wir das Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen (cf-PL) verwenden. Wir nehmen also an, L wäre kontextfrei. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ entsprechend dem cf-PL. Wir müssen nun ein Wort wählen. Welche Wörter sind für unseren Beweis geeignet?

Frage Q8.1. (*zu H8.4*) 1 Punkt

Einfachauswahl. Wir betrachten das Wort $g^n v^n$. Ist es geeignet?

(a) ✗ Ja.

(b) ✗ Nein, es gibt für dieses Wort eine Zerlegung (im Sinne des cf-PL).

(c) ✓ Nein, es gibt ein anderes Problem.

Lösungsskizze. Das Wort ist nicht in L enthalten, da die Steine nicht zurückgelegt werden.

Frage Q8.2. (*zu H8.4*) 1 Punkt

Einfachauswahl. Wir betrachten das Wort $(gv)^n z^n$. Ist es geeignet?

(a) ✗ Ja.

(b) ✓ Nein, es gibt für dieses Wort eine Zerlegung (im Sinne des cf-PL).

(c) ✗ Nein, es gibt ein anderes Problem.

Lösungsskizze. Wir können das Wort in $((gv)^{n-1})(gvz)(\varepsilon)(\varepsilon)(z^{n-1})$ zerlegen.

Frage Q8.3. (*zu H8.4*) 1 Punkt

Einfachauswahl. Wir betrachten das Wort $g^1 v^1 z^1\, g^2 v^2 z^2 \dots g^n v^n z^n$. Ist es geeignet?

(a) ✗ Ja.

(b) ✓ Nein, es gibt für dieses Wort eine Zerlegung (im Sinne des cf-PL).

(c) ✗ Nein, es gibt ein anderes Problem.

Lösungsskizze. Wir können das Wort in $(\varepsilon)(gvz)(\varepsilon)(\varepsilon)(g^2 v^2 z^2 \dots g^n v^n z^n)$ zerlegen.

Frage Q8.4. (*zu H8.4*) 1 Punkt

Wahr/falsch. ✓ Genügt es für den Beweis, abzupumpen? Gibt es also ein Wort $w \in L$ mit $|w| \geq n$, sodass für jede Zerlegung $w = w_1 w_2 w_3 w_4 w_5$ mit $|w_2 w_3 w_4| \leq n$, $w_2 w_4 \neq \varepsilon$ gilt, dass $w_1 w_3 w_5 \notin L$? (Anmerkung: Wir verwenden unübliche Namen für die Zerlegung, da das Alphabet von L die Zeichen v und z beinhaltet.)

Lösungsskizze. Ja, das Wort $w = g^n v^n z^n$. Entweder enthält $w_2 w_4$ ein g, ein v, oder in z (aber nicht alle drei). Nach dem Abpumpen stimmt also die Zahl an g, v und z nicht überein, und das Wort ist nicht in der Sprache.

Frage Q8.5. (*zu H8.4*) 2 Punkt

Mehrfachauswahl. Welche Aussagen sind wahr?

(a) ✓ Es gibt eine kontextfreie Sprache L_1 mit $L = \overline{L_1}$

(b) ✗ Es gibt zwei kontextfreie Sprachen L_1, L_2 mit $L = L_1 \cup L_2$

(c) ✓ Es gibt zwei kontextfreie Sprachen L_1, L_2 mit $L = L_1 \cap L_2$

Lösungsskizze. (a) und (b) folgen direkt aus der Aufgabenstellung: Wenn es einen PDA für $\overline{L}$ gibt, muss die Sprache $\overline{L} = L_1$ kontextfrei sein. Außerdem ist die Vereinigung von zwei kontextfreien Sprachen immer kontextfrei, L aber nicht.

(c) folgt aus der Konstruktion des PDAs für $\overline{L}$. Er rät am Anfang, ob er überprüft, dass jeder geholte Stein verbaut wird, oder, dass jeder verbaute Stein zurückgelegt wird. (Genauer gesagt, überprüft er, dass eine dieser Eigenschaften nicht gilt.) Wir können unsere Konstruktion leicht ändern, dass sie überprüft, dass die Eigenschaften gelten, und erhalten dann zwei kontextfreie Sprachen L_1, L_2 mit $\overline{L} = \overline{L_1} \cup \overline{L_2}$, was äquivalent zu (c) ist.

Frage Q8.6. (*zu H8.4*) 1 Punkt

Mehrfachauswahl. Sei $\Sigma := \{a, b, c\}$ und $L_{x,y}$ die Sprache der balancierten Klammerwörter, wobei $x \in \Sigma$ die öffnende und $y \in \Sigma$ die schließende Klammer ist, und Symbole in $\Sigma \setminus \{x, y\}$ ignoriert werden. Sei $L := L_{a,b} \cap L_{b,c}$. Welche Sprachen sind kontextfrei?

(a) ✗ L

(b) ✓ $\overline{L}$

Lösungsskizze. L ist genau die Sprache aus der Aufgabe, nur mit umbenannten Buchstaben.