Prof. Javier Esparza
Philipp Czerner, Kevin Kappelmann, Valentin Krasotin

Technische Universität München
Lehrstuhl für Theoretische Informatik

Einführung in die Theoretische Informatik

Sommersemester 2024 – Quiz 5

Angabe. Sei G definiert durch $S \to ASB \mid aabb$, $A \to ab \mid \varepsilon$, $B \to ba$.

Frage Q5.1. (*zu H5.5*) 1 Punkt

Mehrfachauswahl. Welche der folgenden Wörter werden von G erzeugt?

(a) ✗ ε (b) ✗ $abba$ (c) ✓ $aabb$ (d) ✓ $abaabbba$

Lösungsskizze. Jedes Wort muss $aabb$ enthalten, dies schließt (a) und (b) aus. Dann gilt $S \to aabb$ und $S \to ASB \to^* ab\,aabb\,ba$.

Frage Q5.2. (*zu H5.5*) 1 Punkt

Mehrfachauswahl. Welche der folgenden Wörter werden von G erzeugt?

(a) ✗ $abaabbabba$ (b) ✗ $abaabb$ (c) ✓ $aabbba$ (d) ✓ $abaabbbaba$

Lösungsskizze.

(a) Nach $aabb$ kann nur ein Suffix in $\{ba\}^*$ folgen

(b) Für jedes A in der Produktionsfolge muss auch ein B produziert werden. Da das Wort mit ab anfängt, brauchen wir also mindestens ein B. Aber aus jedem B entsteht ein ba.

(c) $S \to ASB \to^* aabb\,ba$

(d) $S \to ASB \to AASBB \to^* ab\,aabb\,ba\,ba$

Frage Q5.3. (*zu H5.5*) 1 Punkt

Mehrfachauswahl. Sei G' definiert durch $S \to aSSb \mid \varepsilon$. Welche der folgenden Produktionsfolgen ist eine Linksableitung bestehend aus Produktionen von G' ?

(a) ✓ $S \to aSSb \to aSb \to aaSSbb \to aaSbb \to aabb$

(b) ✗ $S \to aSSb \to aSaSSbb \to aaSSbb \to aaSbb \to aabb$

(c) ✗ $S \to aSSb \to aaSSbSb \to aaSSbb \to aaSbb \to aabb$

Lösungsskizze. Bei (b) ist $aSSb \to aSaSSbb$ nicht erlaubt, da hier das rechte S abgeleitet wurde. Bei (c) ersetzt $aaSSbSb \to aaSSbb$ das rechte S.

Frage Q5.4. (*zu H5.6*) 1 Punkt

Mehrfachauswahl. Sei $\Sigma := \{a, b\}$. Wir wollen zeigen, dass die Sprache $L := \{w \in \Sigma^* : |w|_{aa} = |w|_{bb}\}$ nicht regulär ist, indem wir das Pumping-Lemma verwenden. Wir nehmen also an, dass L regulär wäre, und fixieren ein beliebiges $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Nun müssen wir ein Wort $z \in L$ wählen, und zeigen, dass für z keine Zerlegung existiert, die die Eigenschaften des Pumping-Lemma erfüllt. Welche der folgenden Wörter können gewählt werden, sodass der Beweis funktioniert?

(a) ✗ $aabb$

(b) ✗ a^n

(c) ✗ $(aabb)^n$

(d) ✓ $(aa)^n(bb)^n$

Lösungsskizze.

(a) Das Wort ist zu kurz, es muss mindestens Länge n haben.

(b) Das Wort ist nicht in L enthalten.

(c) Für dieses z gibt es eine Zerlegung, die die Eigenschaften des PL erfüllt: $z = uvw$ mit $u = a$, $v = ab$, $w = b(aabb)^{n-1}$.

(d) Dieses Wort funktioniert: für jede Zerlegung $z = uvw$ mit $|uv| \leq n$ und $v \neq \varepsilon$ gilt $|uw|_{aa} < |uvw|_{aa} = |uvw|_{bb} = |uw|_{bb}$ und somit $uv^0w \notin L$.

Frage Q5.5. (*zu H5.6*) 1 Punkt

Mehrfachauswahl. Sei $\Sigma := \{a, b\}$. Wir betrachten die Sprache $L := \{w \in \Sigma^* : |w|_{ab} = |w|_{ba}\}$. Welche der folgenden Sprachen sind Residualsprachen von L ?

(a) ✓ L

(b) ✗ $\emptyset$

(c) ✗ $\{(ab)^5\}$

Lösungsskizze.

(a) $L = L^\varepsilon$

(b) Da L genau die Wörter enthält, die mit dem gleichen Buchstaben beginnen und enden (und ε), gilt für jedes Wort $w = w_1w_2...w_k \neq \varepsilon$, dass $ww_1 \in L$. Also ist $w_1 \in L^w$, und somit $L^w \neq \emptyset$ für alle $w \in \Sigma^*$. Schließlich gilt $L^\varepsilon = L \neq \emptyset$.

(c) Wenn es ein w mit $L^w = \{(ab)^5\}$ gäbe, dann wäre $L^{wb} = \emptyset$. Aber dies haben wir bereits ausgeschlossen.

Frage Q5.6. (*zu H5.6*) 3 Punkte

Wahr/falsch. Sei $\Sigma := \{a, b\}$. Welche der folgenden Sprachen ist regulär?

(a) ✗ $\{w \in \Sigma^* : |w|_{aba} = |w|_{bab}\}$

(b) ✓ $\{w \in \Sigma^* : |w|_{aab} = |w|_{baa}\}$

(c) ✓ $\{w \in \Sigma^* : |w|_{aba} + |w|_{bba} = |w|_{bab} + |w|_{baa}\}$

Lösungsskizze. **(a)** Die Sprache ist nicht regulär. Ähnlich zur ursprünglichen Aufgabe wählen wir $u_i := (bbabb)^i$, $v_i := (aabaa)^i$ für $i \in \mathbb{N}$. Es gilt $|u_iv_j|_{bab} = i$ und $|u_iv_j|_{aba} = j$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$. Wir betrachten wieder L^{u_i} – die Sprache enthält v_i, aber kein v_j für $j \neq i$. Also sind die Residualsprachen $L^{u_0}, L^{u_1}, L^{u_2}, ...$ paarweise verschieden, und L somit nicht regulär.
(b) Die Sprache ist regulär, da zwischen zwei aab immer genau ein baa entsteht, und andersherum.
(c) Die Sprache ist auch regulär. Nachdem wir aba oder bba lesen, kommt entweder ein b und wir haben bab gelesen, oder ein a und wir lesen baa. Umgekehrt können wir nach bab ein a einlesen, und damit ein aba, oder ein Wort in b^+ und danach ein a, und somit bba. Nach baa lesen wir zunächst beliebig viele a ein, und dann ein b. Nach dem b kommt entweder ein a, und somit wurde aba gelesen, oder es kommt ein Wort in b^+ gefolgt von einem a, und dann haben wir bba gelesen.

In allen Fällen folgt befindet sich zwischen zwei Vorkommnissen von aba und bba immer genau ein bab oder bba, und andersherum.