Prof. Javier Esparza
Philipp Czerner, Kevin Kappelmann, Valentin Krasotin

Technische Universität München
Lehrstuhl für Theoretische Informatik

Einführung in die Theoretische Informatik

Sommersemester 2024 – Quiz 4

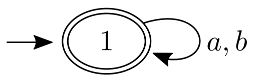
Angabe. Sei $\Sigma := \{a, b\}$. Bestimmen Sie die Anzahl der Zustände des minimalen DFAs für die folgenden Sprachen L.

Frage Q4.1. *(zu H4.5)* 1 Punkt

Einfachauswahl. $L := L(a^*(b \mid \epsilon)(a \mid b^*)^*)$.

(a) ✓ 1 (b) ✗ 2 (c) ✗ 3 (d) ✗ 4 (e) ✗ 5 (f) ✗ ≥ 6

Lösungsskizze.

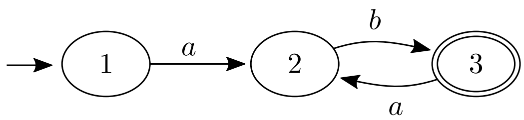


Frage Q4.2. *(zu H4.5)* 1 Punkt

Einfachauswahl. $L := L(a(ba)^*b)$.

(a) ✗ 1 (b) ✗ 2 (c) ✗ 3 (d) ✓ 4 (e) ✗ 5 (f) ✗ ≥ 6

Lösungsskizze. Nicht gezeichnete Kanten führen zu einem impliziten Fangzustand.

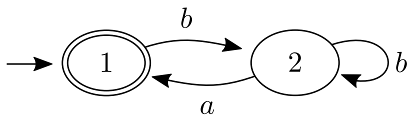


Frage Q4.3. *(zu H4.5)* 1 Punkt

Einfachauswahl. L ist die Sprache der Wörter, in denen direkt vor jedem a ein b steht, und auf jedes b irgendwann ein a folgt. Z.B. gilt also $\varepsilon, babba \in L$, und $aba, baa, bbb \notin L$.

(a) ✗ 1 (b) ✗ 2 (c) ✓ 3 (d) ✗ 4 (e) ✗ 5 (f) ✗ ≥ 6

Lösungsskizze. Nicht gezeichnete Kanten führen zu einem impliziten Fangzustand.



Frage Q4.4. *(zu H4.4)* 1 Punkt

Mehrfachauswahl. Seien $L_1, L_2 \subseteq \{a, b\}^*$ reguläre Sprachen. Welche der folgenden Sprachen sind regulär?

(a) ✓ $L_1^*L_2$

(b) ✓ $L_1 \setminus L_2$

(c) ✓ $\{vw : v \in L_1, w \in L_2\}$

(d) ✓ $\{v_1...v_i : v_1, ..., v_i \in L_1 \cap L_2\}$

Lösungsskizze. (a) und (b) folgen unmittelbar aus den bekannten Abschlusseigenschaften, (c) und (d) sind nur komplizierte Schreibweisen von L_1L_2 und $(L_1 \cap L_2)^*$.

Anmerkung: Teilaufgabe (d) wurde ursprünglich fehlerhaft gestellt, mit der Sprache $L := \{v^i : v \in L_1 \cap L_2, i \in \mathbb{N}\}$. Diese Sprache ist nicht regulär. Wir wählen z.B. $L_1 := L_2 := L(a^*b)$. Dann ist $L = \{(a^jb)^i : i, j \in \mathbb{N}\}$. Fall L regulär wäre, dann auch $L' := L \cap L(a^*ba^*b) = \{a^iba^ib : i \in \mathbb{N}\}$. Diese Sprache hat aber unendlich viele Residualsprachen: $(L')^{a^ib} = \{a^ib\}$ für alle i.

Frage Q4.5. *(zu H4.4)* 1 Punkt

Mehrfachauswahl. Welche der folgenden Aussagen gelten für alle nicht regulären Sprachen $L_1, L_2 \subseteq \{a,b\}^*$?

(a) ✓ $L_1 \cup L_2$ ist unendlich

(b) ✓ $\{wcw : w \in L_1\}$ ist nicht regulär

(c) ✗ $L_1 \setminus L_2$ ist nicht regulär

Lösungsskizze.

(a) Jede endliche Sprache ist regulär, also sind L_1, L_2 und somit $L_1 \cup L_2$ unendlich.

(b) L_1 ist nicht regulär und somit unendlich, also gibt es eine unendliche Folge an Wörtern $w_1, w_2, ... \in L_1$. Für die angegebene Sprache L gilt dann $L^{w_ic} = \{w_i\}$, damit hat L unendlich viele Residualsprachen und ist nicht regulär.

(c) Gegenbeispiel: Sei L_1 eine beliebige, nicht reguläre Sprache, z.B. $L_1 = \{a^nb^n : n \in \mathbb{N}\}$, und $L_2 := L_1$. Dann ist $L_1 \setminus L_2 = \emptyset$ offensichtlich regulär.

Frage Q4.6. *(zu H4.4)* 1 Punkt

Mehrfachauswahl. Welche der folgenden Aussagen gelten für alle regulären Sprachen $L_1 \subseteq \{a,b\}^*$, und nicht regulären Sprachen $L_2 \subseteq \{a,b\}^*$?

(a) ✓ Wenn $L_1 \neq \emptyset$, dann ist $L_1\{c\}L_2$ nicht regulär

(b) ✓ Es gibt keine reguläre Sprache L mit $L_1 \setminus L = L_2$

(c) ✗ L_1L_2 ist nicht regulär

(d) ✗ L_1L_2 ist regulär

Lösungsskizze.

(a) Sei $w \in L_1$, und $L := L_1\{c\}L_2$. Wenn L regulär wäre, dann auch $L^{wc} = L_2$, dies kann also nicht sein.

(b) Wenn L und L_1 regulär sind, dann muss es auch $L_1 \setminus L$ sein.

(c) Gegenbeispiel: $L_1 = L(a^*)$, $L_2 = \{a^{n^2} : n \in \mathbb{N}\}$.

(d) Gegenbeispiel: $L_1 = \{\varepsilon\}$, L_2 beliebige nicht reguläre Sprache, z.B. $L_2 = \{a^nb^n : n \in \mathbb{N}\}$.

Frage Q4.7. *(zu H4.4)* 1 Punkt

Mehrfachauswahl. Welche der folgenden Aussagen gelten für alle $L_1, L_2 \subseteq \{a,b\}^*$?

(a) ✓ Wenn L_1, L_2 die Pumping-Lemma Eigenschaft erfüllen, dann auch $L_1 \cup L_2$.

(b) ✗ Wenn $L_1 \cap L_2$ und $L_1 \cup L_2$ regulär sind, dann auch L_1 und L_2.

(c) ✗ Wenn L_1 endlich ist und L_2 nicht regulär, dann ist L_1L_2 nicht regulär.

Lösungsskizze.

(a) Seien n_1, n_2 die Werte für n in der PL-Eigenschaft von L_1, L_2. Dann wählen wir $n := \max\{n_1, n_2\}$. Sei nun $z \in L_1 \cup L_2$ beliebig, mit $|z| \geq n$. Falls $z \in L_1$, dann gibt es aufgrund der PL-Eigenschaft von L_1 eine Zerlegung $z = uvw$, sodass $|uv| \leq n_1 \leq n$, $v \neq \varepsilon$ und $uv^iw \in L_1 \subseteq L_1 \cup L_2$ für $i \in \mathbb{N}$. Analog finden wir eine Zerlegung für $z \in L_2$.

(b) Gegenbeispiel: $L_1 = \{a^nb^n : n \in \mathbb{N}\}$, $L_2 = \overline{L_1}$

(c) Gegenbeispiel: $L_1 = \{\varepsilon, a\}$, $L_2 = \{a\}^* \setminus \{a^{n^2} : n \in \mathbb{N}\}$

Frage Q4.8. (*zu H4.4*) 1 Punkt

Mehrfachauswahl. Welche der folgenden Aussagen gelten für alle $L_1, L_2 \subseteq \{a, b\}^*$?

(a) ✓ Wenn $L_1\{c\}L_2$ regulär ist, dann ist L_1 oder L_2 regulär.

(b) ✗ Wenn $L_1\{c\}L_2$ regulär ist, dann sind L_1 und L_2 regulär.

(c) ✓ Wenn L_1 nicht regulär ist, dann ist L_1^a oder L_1^b nicht regulär.

(d) ✗ Wenn L_1 nicht regulär ist, dann sind L_1^a und L_1^b nicht regulär.

Lösungsskizze.

(a) Wenn L_1 leer ist, dann auch regulär und wir sind fertig. Ansonsten sei $L := L_1\{c\}L_2$ und $w \in L_1$. Wenn L regulär ist, dann auch $L^{wc} = L_2$. (Ähnlich könnte man folgern, dass L_2 regulär ist, indem man L^R betrachtet.)

(b) Gegenbeispiel: $L_1 := \emptyset$ und L_2 nicht regulär, z.B. $L_2 := \{a^nb^n : n \in \mathbb{N}\}$.

(c) $L_1 = \{a\}L_1^a \cup \{b\}L_1^b \cup (L_1 \cap \{\varepsilon\})$. Da $L_1 \cap \{\varepsilon\}$ endlich und somit immer regulär ist, muss L_1 auch regulär sein, wenn L_1^a und L_1^b regulär sind. L_1 ist aber nicht regulär, also kann dies nicht sein.

(d) Gegenbeispiel: $L_1 := \{a^nb^n : n \in \mathbb{N}\}$. Dann ist $L^b = \emptyset$ und somit regulär.

Anmerkung: In der ursprünglichen Version dieser Frage wurde (b) fälschlicherweise als wahr bezeichnet.