Prof. Javier Esparza
Philipp Czerner, Kevin Kappelmann, Valentin Krasotin

Technische Universität München
Lehrstuhl für Theoretische Informatik

Einführung in die Theoretische Informatik

Sommersemester 2024 – Quiz 3

Frage Q3.1. (*zu H3.2*) 1 Punkt

Mehrfachauswahl. Wir betrachen ein Gleichungssystem, das sich durch einen NFA ergibt. Beim Lösen dieses Gleichungssystems über Ardens Lemma gibt es mehrere Möglichkeiten, wie man die Gleichungen auflöst. Seien r_1, r_2 nun zwei reguläre Ausdrücke, die man als Ergbnis erhält (indem man jeweils unterschiedlich vorgeht). Wahr oder falsch?

(a) ✓ r_1 und r_2 sind äquivalent.
(b) ✗ r_1 und r_2 sind gleich.

Lösungsskizze. Da beide Ausdrücke die Sprache des NFAs erzeugen, sind sie äquivalent; also $L(r_1) = L(r_2)$. Aber die Ausdrücke müssen nicht notwendigerweise gleich sein, somit gilt $r_1 = r_2$ im Allgermeinen nicht.

Frage Q3.2. (*zu H3.5*) 1 Punkt

Mehrfachauswahl. Sei $\Sigma := \{\texttt{a}, ..., \texttt{z}\}$ und L die Menge aller Wörter, die `dora` nicht enthalten. Welche der folgenden Wörter sind in L^R enthalten?

(a) ✓ `deodorant`
(b) ✓ `goldorange`
(c) ✓ `tornadoartig`
(d) ✗ `parodie`
(e) ✗ `karodame`
(f) ✗ `polarodyssee`

Lösungsskizze. L^R enthält genau die Wörter, die `arod` nicht enthalten.

Frage Q3.3. (*zu H3.5*) 1 Punkt

Mehrfachauswahl. Sei $\Sigma := \{a, b\}$. Für welche der folgenden Sprachen L gilt $L = L^R$?

(a) ✓ $L(ab^*ba)$
(b) ✗ $L(ab^*a^*ba)$
(c) ✗ $\{ww : w \in \{a\}^*\{b\}^*\}$
(d) ✓ $\{w \in \Sigma^* : w \neq w^R\}$

Frage Q3.4. (*zu H3.5*) 1 Punkt

Mehrfachauswahl. Sei L regulär. Welche der folgenden Sprachen sind regulär?

(a) ✓ LL^R
(b) ✓ $L \cap L^R$
(c) ✗ $\{w^R w : w \in L\}$
(d) ✗ $\{w \in L : w = w^R\}$

Frage Q3.5. (*zu H3.5*) 1 Punkt

Mehrfachauswahl. Sei $r := (ab \mid a)^*ba \mid bba$. Welche REs beschreiben $L(r)^R$?

(a) ✓ $ab(ba \mid a)^* \mid abb$
(b) ✗ $bba \mid (a \mid ab)^*ba$
(c) ✗ $abb \mid ab^*(a \mid ba)$
(d) ✗ $(ba \mid b)^*ab \mid aab$

Lösungsskizze.

(a) Hier wurde jede Konkatenation umgedreht, was genau die Prozedur ist, um die Sprache des regulären Ausdrucks zu spiegeln.

(b) Alle Wörter in $L(r)$ enden in a, aber der RE erzeugt bba, was nicht mit einem a anfängt.

(c) $L(r)$ enthält $aaba$, ein Wort mit 3 a. Der reguläre Ausdruck erzeugt aber nur Wörter mit höchstens zwei a.

(d) Hier gibt es wieder ein Wort, das mit b anfängt.

Frage Q3.6. (*zu H3.5*) 1 Punkt

Wahr/falsch. ✓ Sei M ein ϵ-NFA mit n Zuständen. Gibt es einen ϵ-NFA M' mit $n+1$ Zuständen und $L(M') = L(M)^R$?

Lösungsskizze. Man kann die gleiche Konstruktion wie für NFAs nutzen.

Frage Q3.7. (*zu H3.5*) 1 Punkt

Einfachauswahl. Sei $\Sigma := \{a, b\}$ und $L \subseteq \Sigma^*$ eine reguläre Sprache, sodass es einen DFA für L mit 7 Zuständen gibt. Welcher der folgenden Werte k ist der kleinste, sodass wir wissen, dass ein DFA für L^R mit höchstens k Zuständen existiert.

(a) ✗ 8

(b) ✓ 256

(c) ✗ 65536

(d) ✗ ∞

Lösungsskizze. Jeder DFA ist bereits ein NFA. Den NFA können wir dann spiegeln, und erhalten einen mit 8 Zuständen. Den konvertieren wir zu einem DFA über Potenzmengenkonstruktion, erhalten also einen DFA mit höchstens $2^8 = 256$ Zuständen.

Umgekehrt betrachten wir die Sprache $L := \Sigma^4\{a\}\Sigma^*$. Es gibt einen DFA für L mit 7 Zuständen und $L^R = \Sigma^*\{a\}\Sigma^4$. Aber jeder DFA für L^R hat mindestens 32 Zustände (nach Lemma 3.12).

Frage Q3.8. (*zu H3.5*) 1 Punkt

Einfachauswahl. Sei $\Sigma := \{a, b\}$ und $L \subseteq \Sigma^*$ eine reguläre Sprache, sodass es eine rechtslineare Grammatik für L mit 7 Nichtterminalsymbolen gibt. Welcher der folgenden Werte k ist der kleinste, sodass wir wissen, dass eine rechtslineare Grammatik für L^R mit höchstens k Nichtterminalen existiert.

Hinweis: Für jeden NFA mit n Zuständen gibt es eine äquivalente rechtslineare Grammatik mit n Nichtterminalen.

(a) ✓ 8

(b) ✗ 256

(c) ✗ 65536

(d) ✗ ∞

Lösungsskizze. Wir konvertieren die Grammatik zu einem NFA mit 8 Zuständen, von denen genau einer final ist. Diesen NFA können wir dann invertieren. Wir müssen keinen Zustand hinzufügen, da wir nur einen Finalzustand haben. Das Ergebnis konvertieren wir dann wieder zu einer rechtslinearen Grammatik, immer noch mit 8 Zuständen.

Frage Q3.9. (*zu H3.5*) 1 Punkt

Einfachauswahl. Wie können wir NFAs erweitern, sodass für jeden erweiterten NFA M mit n Zuständen ein erweiterter NFA M' mit n Zuständen und $L(M') = L(M)^R$ existiert?

(a) ✓ Wir erlauben eine Menge an Anfangszustände zu haben (statt genau einem Anfangszustand).

(b) ✗ Wir erlauben Transitionen, die ein Wort einlesen (statt einem Zeichen).

(c) ✗ Wir fügen eine zweite Art an Transitionen hinzu, die mit einem Zeichen beschriftet sind und ausgeführt werden, indem ein *anderes* Zeichen gelesen wird.

(d) ✗ Wir fügen eine zweite Art an Transitionen hinzu, die nur einmal (für das ganze einzulesende Wort) verwendet werden können.

Lösungsskizze. (a) funktioniert, da wir einfach alle Transitionen umdrehen können und Finalzustände und Anfangszustände vertauschen.

Für (b-d) betrachten wir die Sprache $L := L(b^*ac^* \mid b^*ad^*)$. Es gibt einen NFA für L mit 3 Zuständen, und somit auch einen erweiterten NFA. Es gibt aber keinen erweiterten NFA für L^R mit 3 Zuständen. Letzteres folgt daraus, dass in den akzeptierenden Läufen für ab^k, c^ka und d^ka sich jeweils ein Zustand beim Einlesen der drei gleichen Zeichen wiederholt, wenn k groß genug ist. (Für (d) fordern wir zusätzlich, dass diese Schleife keine der neuen Transitionen enthält.) Wir nennen diese q_b, q_c und q_d. Wenn $q_b = q_c$, dann wird ein Wort in $L(c^+b^+c^*a)$ akzeptiert, dies ist aber nicht in L^R. Analog folgen $q_b \neq q_d$ und $q_c \neq q_d$. Wenn q_x Startzustand wäre, für $x \in \{b, c, d\}$, dann würde ein Wort in $L(x^+c^+a \mid x^+d^+a)$ akzeptiert werden, dies ist aber auch nicht in L^R.