Prof. Javier Esparza
Philipp Czerner, Kevin Kappelmann, Valentin Krasotin

Technische Universität München
Lehrstuhl für Theoretische Informatik

Einführung in die Theoretische Informatik

Sommersemester 2024 – Quiz 1

Hinweis: Sie können das Quiz auf Moodle interaktiv lösen!

Frage Q1.1. (*zu H1.4*) 1 Punkt

Mehrfachauswahl. Sei $\Sigma := \{a, b\}$, $A := \{a, ba, ab\}$. Welche der folgenden Wörter sind in $\emptyset A^* \cup A^2$ enthalten?

(a) ✗ ε (b) ✓ baa (c) ✓ $abab$ (d) ✓ $abba$ (e) ✗ $baaab$

Frage Q1.2. (*zu H1.4*) 1 Punkt

Mehrfachauswahl. Sei $\Sigma := \{a, b\}$, $A := \{a, ba, ab\}$. Welche der folgenden Wörter sind in $(AA)^2$ enthalten?

(a) ✗ ε (b) ✗ aa (c) ✓ $aaaa$ (d) ✗ $abab$ (e) ✗ $baaab$

Frage Q1.3. (*zu H1.4*) 1 Punkt

Mehrfachauswahl. Sei $\Sigma := \{a, b\}$, $A := \{a, ba, ab\}$, $B := \{\varepsilon, ba, abb\}$. Welche der folgenden Wörter sind in $B^* \setminus A^*$ enthalten?

(a) ✗ ε (b) ✗ b (c) ✓ abb (d) ✗ $aabb$ (e) ✓ $abbba$

Frage Q1.4. (*zu H1.2*) 3 Punkte

Wahr/falsch. Sei $\Sigma := \{a, b\}$ und $A, B, C \subseteq \Sigma^*$ Sprachen.

(a) ✓ $|AB \cup AC| \geq |A(B \cap C)|$

(b) ✗ $A \subseteq B \Leftrightarrow A^2 \subseteq B^2$

(c) ✓ $(A^2)^* \subseteq (A^*)^2$

Lösungsskizze. **(a)** $AB \cup AC = A(B \cup C) \supseteq A(B \cap C)$, da $B \cup C \supseteq B \cap C$
(b) Gegenbeispiel: $A := \{a\}$, $B := \{\varepsilon, aa\}$. Es gilt $A^2 \subseteq B^2$ aber nicht $A \subseteq B$.
(c) $(A^2)^* = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (A^2)^i = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A^{2i} \subseteq A^* = A^*A^*$

Frage Q1.5. (*zu H1.5*) 3 Punkte

Einfachauswahl. Sei G eine beliebige Grammatik über Σ, mit $L(G) \neq \emptyset$ und $L(G) \neq \Sigma^*$. Welche der folgenden Aussagen ist **FALSCH**? Bitte beachten Sie, dass die folgenden Aussagen für alle G gelten müssen, und (abhängig von der Aussage) für ein G' oder für alle G'.

(a) ✗ Für eine beliebige Grammatik G', die durch das Entfernen mehrerer Produktionen aus G entsteht, gilt $L(G') \subseteq L(G)$.

(b) ✗ Für eine beliebige Grammatik G', die durch das Hinzufügen einer Produktionen zu G entsteht, gilt $L(G') \supseteq L(G)$.

(c) ✓ Es gibt eine Grammatik G', die durch das Löschen einer Produktionen aus G entsteht, mit $L(G') \neq L(G)$.

(d) ✗ Es gibt eine Grammatik G', die durch das Hinzufügen einer Produktionen zu G entsteht, mit $L(G') \neq L(G)$.

Lösungsskizze. **(a)** Es ist bereits bekannt, dass die Aussage gilt, wenn man nur eine Produktion hinzufügt. Wenn wir die Produktionen also eine nach der anderen entfernen, bilden wir in jedem Schritt eine Teilmenge der Sprache; und damit insgesamt auch.
(b) Wenn G' durch das Hinzufügen einer Produktion zu G entsteht, dann ergibt sich G durch das Entfernen einer Produktion aus G'. Damit können wir das auf die aus der Aufgabe bekannte Aussage zurückführen.
(c) Wir können G als Grammatik mit Produktionen $S \to A \mid B$ und $A \to a$, $B \to a$ wählen. Egal, welche Produktion wir löschen, $L(G') = \{a\} = L(G)$. Also ist die Aussage falsch (und damit die richtige Antwort).
(d) Da $L(G) \neq \Sigma^*$, gibt es ein Wort $w \in \Sigma^*$ mit $w \notin L(G)$. Indem wir die Produktion $S \to w$ hinzufügen, ändern wir die erzeugte Sprache.

Frage Q1.6. (*zu H1.5*) 3 Punkte

Einfachauswahl. Sei G eine beliebige *kontextfreie* Grammatik über Σ und G' eine Grammatik, die dadurch entsteht, dass man ein beliebiges Zeichen α (Terminal oder Nichtterminal) der rechten Seite einer Produktion von G löscht (und G ansonsten beibehält). Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

(a) ✓ Wenn $L(G)$ endlich ist und α ein Terminalzeichen, dann ist $L(G')$ auch endlich.

(b) ✗ Wenn $L(G)$ endlich ist und α ein Nichtterminalzeichen, dann ist $L(G')$ auch endlich.

(c) ✗ Wenn $L(G)$ unendlich ist und α ein Terminalzeichen, dann ist $L(G')$ auch unendlich.

(d) ✗ Wenn $L(G)$ unendlich ist und α ein Nichtterminalzeichen, dann ist $L(G')$ auch unendlich.

Lösungsskizze. **(a)** Sei $w \in L(G')$, also $S \to_{G'}^* w$. Wenn man die gleichen Produktionen in G ausführt, erhält man ein Wort w'. Dieses enthält alle Zeichen aus w, möglicherweise mit Kopien von c dazwischen. Da c ein Terminal ist, gilt $w' \in L(G)$. Außerdem erhalten wir $|w'| \geq |w|$. Wenn $L(G')$ unendlich wäre, gäbe es beliebig lange Wörter w in $L(G')$, und somit beliebig lange Wörter $w' \in L(G)$. Aber dann ist $L(G)$ auch unendlich. Da $L(G)$ endlich ist, muss $L(G')$ es auch sein.
(b) Als Gegenbeispiel wählen wir die Grammatik G mit Produktionen $S \to aS \mid bS$. Es gilt also $L(G) = \emptyset$. Wir löschen nun S aus der zweiten Produktion. Mit Produktionen $S \to aS \mid b$ gilt nun $L(G') = L(a^*b)$.
(c) Für G nehmen wir $S \to aS \mid b$. Durch Löschen von a erhalten wir $S \to S \mid b$.
(d) Für G nehmen wir wieder $S \to aS \mid b$, und erhalten nach Löschen von S die Produktionen $S \to a \mid b$.