Prof. Javier Esparza
Philipp Czerner, Kevin Kappelmann, Valentin Krasotin

Technische Universität München
Lehrstuhl für Theoretische Informatik

# Einführung in die Theoretische Informatik

Sommersemester 2024 – Hausaufgabenblatt 12

**Abgabe: 15.07.2024, 12:00 CEST**

- Die Aufgaben werden in folgender Reihenfolge korrigiert: H12.1, H12.2
- Die Knobelaufgabe bitte separat auf Moodle abgeben. Sie wird korrigiert.
- Die genauen Details, wie wir die Eingabe einer Sprache kodieren, sind für uns nicht relevant. Es ist z.B. erlaubt, $\overline{\mathsf{SAT}} = \{\text{Formel } F : F \text{ ist nicht erfüllbar}\}$ zu schreiben, obwohl eigentlich auch Wörter, die überhaupt keine Formel kodieren, in $\overline{\mathsf{SAT}}$ enthalten wären. Eine Ausnahme bildet nur, wenn die Wahl der Kodierung die Länge der Eingabe signifikant beeinflussen würde (z.B. unäre/binäre Darstellung von Zahlen).

**Aufgabe H12.1.** (*Satisfied?*) 4+4+4+4 Punkte

Zwei aussagenlogische Formeln über denselben Variablen sind *äquivalent*, wenn sie dieselben erfüllenden Belegungen haben, d.h. jede Belegung erfüllt beide Formeln oder keine.

Nehmen Sie $\mathsf{P} \neq \mathsf{NP}$ an. Entscheiden Sie unter dieser Annahme, welche der folgenden Probleme in $\mathsf{P}$ und welche $\mathsf{NP}$-vollständig sind.

Wenn das Problem in $\mathsf{P}$ liegt, beschreiben Sie einen polynomiell zeitbeschränkten Algorithmus und begründen Sie die Korrektheit und polynomielle Beschränktheit des Algorithmus kurz.

Wenn das Problem $\mathsf{NP}$-vollständig ist, geben Sie eine Reduktion von $\mathsf{3KNF\text{-}SAT}$ an. Die Reduktionsfunktion muss präzise definiert sein. Die Korrektheit der Reduktion müssen Sie aber nur skizzieren und nicht formal beweisen.

(a) **Gegeben:** Eine KNF-Formel $F$.

**Problem:** Ist $\neg F$ erfüllbar?

(b) **Gegeben:** Zwei KNF-Formeln $F$ und $G$ über denselben Variablen.

**Problem:** Sind $F$ und $G$ nicht äquivalent?

(c) **Gegeben:** Eine KNF-Formel $F$.

**Problem:** Gibt es eine erfüllbare Belegung, die höchstens 3 oder mindestens $v-3$ Variablen wahr macht, wobei $v$ die Anzahl der Variablen von $F$ ist?

(d) **Gegeben:** Eine KNF-Formel $F$ mit einer geraden Anzahl von Variablen.

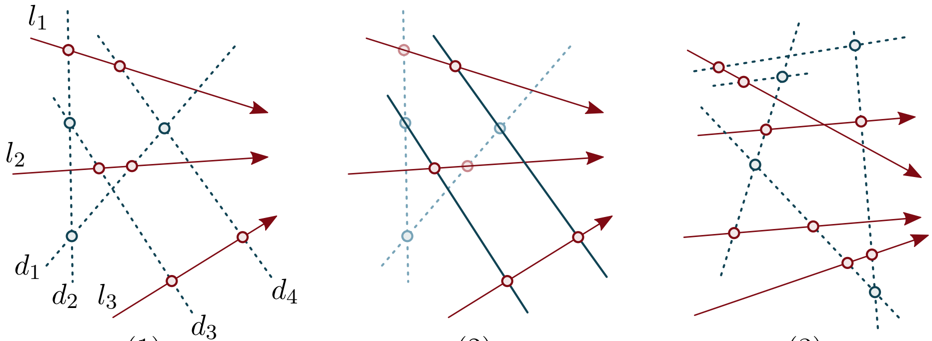
**Problem:** Gibt es eine erfüllbare Belegung, die genau die Hälfte der Variablen von $F$ wahr macht?

**Aufgabe H12.2.** (*Laser-focused*) 4+3+4+6 Punkte

Nachdem er sich einige Wochen lange verdeckt gehalten hatte, hatten die meisten den berüchtigten Superschurken Dr. Evilsparza schon vergessen. Nun ist er aber wieder aufgetaucht, mit einem diabolischen Plan, die Weltherrschaft an sich zu reißen! Er hat eine Reihe von Superlasern aufgestellt, mit denen er direkt auf den THEO-Hausaufgabenserver zielt. Ohne Musterlösungen werden sicher alle Teilnehmer durchfallen, sodass es keine neuen Informatikabsolventen gibt, und alle auf das IT-Consultingunternehmen „Evillest Evilness Software *Inc*“ angewiesen sind. Zum Glück hat der Lehrstuhl für KI (Klausurintegrität) einen Plan.

Spezielle, mit Spiegeln ausgestattete Drohnen können losgeschickt werden, um die Superlaser zu ihrer Quelle zurückzuschicken und so zu zerstören. Auf einer Karte sind bereits die Schusslinien der Laser eingezeichnet, die möglichen Flugbahnen der Drohnen, die Punkte, an denen eine Drohne den Laserstrahl kreuzen würde, und die Punkte, an denen sich die Flugbahn zweier Drohnen kreuzen würde. Letzteres würde zum Absturz beider Drohnen führen und muss unbedingt vermieden werden.

Ihre Aufgabe ist es nun, herauszufinden welche Drohnen gestartet werden müssen, sodass sich keine zwei Drohnen kreuzen und alle Laser zerstört werden.




(1) (2) (3)

Formal definieren wir das Klausurrettungsproblem (KRP) wie folgt:

**Eingabe:** Mengen an Flugbahnen $L, D$ und Schnittpunkte $S \subseteq L \times D \cup D \times D$
**Ausgabe:** Existiert $M \subseteq D$ mit $M \times M \cap S = \emptyset$ und $\{l\} \times M \cap S \neq \emptyset$ für alle $l \in L$?

In der Zeichnung finden Sie eine Instanz des KRP (1), mit

$$\begin{aligned} L &= \{l_1, l_2, l_3\} \\ D &= \{d_1, d_2, d_3, d_4\} \\ S &= \{(l_1, d_2), (l_1, d_4), (l_2, d_3), (l_2, d_1), (l_3, d_3), (l_3, d_4), (d_1, d_2), (d_2, d_3), (d_1, d_4)\} \end{aligned}$$

Außerdem abgebildet sind eine Lösung dieser Instanz (2), mit $M = \{d_3, d_4\}$, und eine weitere, unlösbare Instanz (3). Die Laser sind jeweils als Pfeile gezeichnet und die möglichen Flugbahnen der Drohnen als gestrichelte Linien.

**Achtung:** Die graphische Darstellung dient nur der Übersichtlichkeit. Die Eingabe der Instanz umfasst nur die Mengen, wie oben. Beachten Sie insbesondere, dass nicht jeder Schnittpunkt von zwei Graden bedeutet, dass sich die Drohnen bzw. Laser da kreuzen würden.

(a) Konstruieren Sie einen polynomiell beschränkten Verifikator für KRP (s. Def. 6.7). Beschreiben Sie insbesondere, wie ein Zertifikat für eine Instanz $w \in$ KRP aussieht, und wie dieses Zertifikat in polynomieller Zeit überprüft werden kann.

In der Vorlesung haben wir das NP-vollständige Problem 3COL (3-Färbbarkeit) kennen gelernt. (Anm.: Wir zeigen dort nicht, dass es NP-vollständig ist.) Unser Ziel ist jetzt, 3COL auf KRP zu reduzieren.

(b) Zunächst wollen wir eine Instanz konstruieren, mit der wir die Farbe eines einzelnen Knotens $v$ modellieren können. Geben Sie eine Instanz vom KRP an, die Drohnen

$v_1, v_2, v_3$ enthält und deren einzige Lösungen $M = \{v_1\}$, $M = \{v_2\}$ und $M = \{v_3\}$ sind. (Sie müssen dazu weitere Drohnen und/oder Laser verwenden.) Begründen Sie kurz, wieso Ihre Instanz korrekt ist.

*Anmerkung:* So eine Konstruktion wird allgemein auch als Gadget bezeichnet.

(c) Erweitern Sie nun Ihre Konstruktion aus (b), um den Graphen mit Knoten $\{u, v\}$ und der Kante $\{u, v\}$ zu modellieren. Verwenden Sie dazu zwei Kopien ihrer Lösung aus (b), und erweitern die Instanz geeignet, sodass es 6 Lösungen gibt, und keine davon sowohl $u_i$ als auch $v_i$ beinhaltet, für $i \in \{1, 2, 3\}$.

(d) Zeigen Sie $\mathsf{3COL} \leq_p \mathsf{KRP}$.

**Quizaufgabe H12.3.** (*Eine Tautologie ist eine Tautologie*) unkorrigiert (8 Punkte)

Doras Freundin Bijanka (eine Kaffeemaschine) geht es gerade nicht so gut. Sie sucht schon seit Stunden nach einer Lösung für eine Formel, die Theo ihr gesagt hat, kann trotz ihres hochmodernen Prozessors aber keine finden. (Dora vermutet, dass Theo mal wieder versucht, seine Hausaufgaben nicht selbst machen zu müssen.) Sie möchte Bijanka trösten, indem sie sich eine Formel ausdenkt, für die es ganz leicht ist, eine Lösung zu finden! Die NP-Probleme sind dafür schlecht, da es für sie schwierig ist, Lösungen zu finden – also denkt sich Dora eine neue Klasse aus, die sie coffee-NP (kurz coNP) nennt.

Wir definieren $\mathsf{coNP} := \{\overline{L} : L \in \mathsf{NP}\}$. Wir nennen eine aussagenlogische Formel $F$ *Tautologie*, wenn $F$ für jede Belegung erfüllt ist. Das Problem TAUTOLOGY ist nun

**Eingabe:** Aussagenlogische Formel $F$
**Ausgabe:** Ist $F$ eine Tautologie?

(a) Beweisen Sie $\overline{\mathsf{SAT}} \leq_p \mathsf{TAUTOLOGY}$ .

(b) Seien $L_1, L_2$ Sprachen. Zeigen Sie $L_1 \leq_p L_2 \Leftrightarrow \overline{L_1} \leq_p \overline{L_2}$ .

(c) Seien $L_1, L_2, L_3$ Sprachen. Zeigen Sie $L_1 \leq_p L_2 \wedge L_2 \leq_p L_3 \Rightarrow L_1 \leq_p L_3$ .

(d) Zeigen Sie, dass TAUTOLOGY coNP-hart ist, also $L \leq_p \mathsf{TAUTOLOGY}$ für jedes $L \in \mathsf{coNP}$.

**Knobelaufgabe H12.4.** (*Teilerfolg*)

Wir betrachten wieder das KRP aus Aufgabe H12.2. Sie haben leider festgestellt, dass es unmöglich ist, alle von Dr. Evilsparzas Lasern zu stoppen, wollen aber nicht aufgeben. Gibt es vielleicht eine Möglichkeit, zumindest die meisten Laser aufzuhalten?

(a) Zeigen Sie: Wenn die Flugbahn jeder Drohne mit höchstens einer anderen Drohne kollidieren würde, und jeder Laser von mindestens zwei Drohnen gestoppt werden kann, ist es möglich, mindestens $\frac{3}{4}$ der Laser zu stoppen.

(b) Beschreiben Sie ein Verfahren, das eine entsprechende Lösung in polynomieller Zeit auf einer DTM berechnet.

**Hinweis:** Vereinfachen Sie zunächst die Instanz und betrachten dann eine sinnvolle Teilmenge $F$ der möglichen Lösungen. Wenn die Lösungen aus $F$ im Durchschnitt mindestens $\frac{3}{4}$ der Laser stoppen, dann tut es die beste Lösung aus $F$ auch.