Prof. Javier Esparza
Philipp Czerner, Kevin Kappelmann, Valentin Krasotin

Technische Universität München
Lehrstuhl für Theoretische Informatik

Einführung in die Theoretische Informatik

Sommersemester 2024 – Hausaufgabenblatt 11

Abgabe: 08.07.2024, 12:00 CEST

- Die Aufgaben werden in folgender Reihenfolge korrigiert: H11.1, H11.2, H11.3
- Die Knobelaufgabe bitte separat auf Moodle abgeben. Sie wird korrigiert.
- $0 \in \mathbb{N}$, TMs sind deterministisch

Aufgabe H11.1. (*Downwards is the only way forwards.*) 7 Punkte

Wir betrachten folgende Probleme, für eine kontextfreie Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$:

$\langle 1 \rangle$ Ist $L(G) = \Sigma^*$? $\langle 2 \rangle$ Ist $L(G) = L(G)^R$?

Von $\langle 1 \rangle$ wurde in der Vorlesung gezeigt, dass es unentscheidbar ist. Wir wollen nun die Unentscheidbarkeit von $\langle 2 \rangle$ beweisen. Reduzieren Sie also $\langle 1 \rangle$ auf $\langle 2 \rangle$. Beschreiben Sie dafür Ihre Reduktionsfunktion und beweisen, dass diese die notwendigen Eigenschaften erfüllt.

Hinweise: Zur Vereinfachung dürfen Sie $\Sigma = \{a, b\}$ für das zu reduzierenden Problem annehmen, ohne das Problem, auf das Sie reduzieren, einzuschränken.

Aufgabe H11.2. (*The line must be drawn here! This far, no further!*) 10 Punkte

Zum Geburtstag hat Theo eine k-Band-Turingmaschine geschenkt bekommen. Er ist sich aber nicht sicher, ob er sie laufen lassen soll – dies könnte ja sehr lange dauern, und eigentlich wollte er noch den Schnecken beim Kriechen zuschauen. Können Sie ihm helfen?

Wir nennen eine k-Band-TM $(+1)$-zeitbeschränkt, wenn sie für alle Eingaben mit Länge n innerhalb von $n + 1$ Schritten hält. (Beachten Sie, dass n variabel ist.) Zeigen Sie, dass die Sprache

$$L := \{w \in \{0, 1\}^* : M_w \text{ ist } (+1)\text{-zeitbeschränkt}\}$$

unentscheidbar ist.

Hinweise: Reduzieren sie von $\overline{\mathcal{H}_0}$ (dem Komplement des Halteproblems auf leerem Band). Beachten Sie, dass $\mathcal{H}_0$ nur 1-Band-TMs kodiert. Die Eingabe einer k-Band-TM steht auf dem ersten Band, die anderen Bänder sind am Anfang leer.

Quizaufgabe H11.3. (*Do or do not. There is no try.*) unkorrigiert (8 Punkte)

Dr. Evilsparza hat sich auf eine Stelle an der Technischen Hochschule Estlingen-Oberfeld beworben, und könnte bald Prof. Evilsparza sein. Um dies zu verhindern, versuchen Sie, ihn vor der Auswahlkommission bloßzustellen, indem Sie seine Ausführungen zur Unentscheidbarkeit als falsch entlarven.

Sei $\Sigma := \{0, 1\}$. Bestimmen Sie jeweils, ob folgende Aussagen wahr sind. Falls ja, geben Sie eine *kurze* Begründung an, ansonsten ein Gegenbeispiel.

(a) Sei $L \subseteq \Sigma^*$ unentscheidbar und $w \in L$. Dann ist $\{v : M_w[v]\downarrow\}$ unentscheidbar.

(b) Für zwei unentscheidbare Sprachen $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ ist $L_1 \cup L_2$ unentscheidbar.

(c) Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ total, berechenbar und bijektiv. Dann ist f^{-1} berechenbar.

(d) Für beliebige TMs M_1, M_2 ist die Sprache $L(M_1) \setminus L(M_2)$ semi-entscheidbar.

(e) Sei $L \subseteq \Sigma^*$ unendlich. Dann gibt es eine unentscheidbare Sprache $L' \subseteq L$.

Hinweis: Bitte beachten Sie, dass nach Definition $L(M)$, für eine TM M, die Sprache der Wörter ist, auf denen M in einem Haltezustand terminiert. Insbesondere ist $L(M)$ semi-entscheidbar, aber nicht unbedingt entscheidbar.

Knobelaufgabe H11.4. (*No one can be told what The Matrix is.*)

Doras Urgroßonkel, der Rektor der Technischen Hochschule Estlingen-Oberfeld, hat Geburtstag, und die ganze Familie ist eingeladen. Nach altem Estlinger Brauch gibt es statt Kerzen auf einer Geburtstagstorte einen Vektor mit dem Alter, und statt zu pusten wird dieser Vektor so lange mit Matrizen multipliziert, bis er verschwunden ist. (Die Matrizen werden von den Gästen mitgebracht.) Leider hat Doras Urgroßonkel es dieses Jahr nicht geschafft, seinen Altersvektor wegzumultiplizieren, obwohl er sich viel Mühe gegeben hat. Dora möchte ihn nun trösten, und ihm beweisen, dass das Problem nicht immer gelöst werden kann.

Wir untersuchen nun das Vektorvernichtungsproblem (VVP):

Eingabe: Matrizen $M_1, ..., M_k \in \mathbb{Z}^{3\times 3}$, Vektor $v \in \mathbb{Z}^3$
Ausgabe: Existieren $A_1, ..., A_l \in \{M_1, ..., M_k\}$ mit $A_1 A_2 \cdots A_l v = 0$?

Unser Ziel ist, zu zeigen, dass das VVP unentscheidbar ist.

(a) Sei $M := \begin{pmatrix} 0 & v & -v \end{pmatrix}$, mit $v \in \mathbb{Z}^3$, und $M_1, ..., M_k \in \mathbb{Z}^{3\times 3}$, wobei $M_1, ..., M_k$ invertierbar sind. Zeigen Sie, dass das VVP für $M, M_1, ..., M_k; v$ genau dann eine Lösung hat, wenn es $A_1, ..., A_l \in \{M_1, ..., M_k\}$ gibt, sodass $M A_1 A_2 \cdots A_l v = 0$.

(b) Zeigen Sie nun, dass das VVP unentscheidbar ist, indem sie 01-MPCP reduzieren.[1]

[1] Wir haben zwar nicht explizit in der Vorlesung gezeigt, dass 01-MPCP unentscheidbar ist, aber der Beweis von Korollar 5.59 funktioniert unverändert.