Prof. Javier Esparza
Philipp Czerner, Kevin Kappelmann, Valentin Krasotin

Technische Universität München
Lehrstuhl für Theoretische Informatik

Einführung in die Theoretische Informatik

Sommersemester 2024 – Hausaufgabenblatt 10

Abgabe: 01.07.2024, 12:00 CEST

- Die Aufgaben werden in folgender Reihenfolge korrigiert: H10.1, H10.2.
- Die Knobelaufgabe bitte separat auf Moodle abgeben. Sie wird korrigiert.

Aufgabe H10.1. (*Falsch/Wahr*) 4 Punkte

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Begründen Sie ihre Behauptung. Ein ausführlicher formaler Beweis ist nicht gefordert, aber eine umfassende Begründung.

(a) Sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine unentscheidbare Sprache, $w \in \Sigma^*$. L lässt sich mittels $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ mit

$$f(x) = \begin{cases} w & \text{falls } x \in L \text{ oder } x = w \\ x & \text{sonst} \end{cases}$$

auf $L \cup \{w\}$ reduzieren.

(b) Sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine unentscheidbare Sprache, sei $w \in \Sigma^*$. Dann ist $L \cup \{w\}$ unentscheidbar.

(c) Sei $\Sigma = \{a\}$. Alle Sprachen über Σ sind entscheidbar.

(d) Sei $L \subseteq \Sigma^*$. Falls L^* entscheidbar ist, ist auch L entscheidbar.

Aufgabe H10.2. (*Alle Jahre wieder*) 7+4 Punkte

Heute ist „Tag der offenen Tür“ in Theos Schule und Dora besucht ihn. Zu diesem Anlass gibt es einen Test über die Geschichte des Sommerfestes, das jedes Jahr entweder in Estlingen oder in Oberfeld ausgetragen wird. Dies folgt einem ausgeklügeltem Schema, das Theo leider nicht kennt, da er zu sehr damit beschäftigt war, die Sandkörner in seinem Sandkasten zu zählen. Zum Glück weiß Dora genau, in welchen Jahren das Sommerfest in Estlingen stattfindet, und kann Theo helfen.

Allerdings ist Doras Kindergarten in Oberfeld – in Theos Estlinger Schule werden nur Jahreszahlen in der traditionellen Estlinger Form verwendet: an ungerade Jahreszahlen wird eine 3 angehängt. Statt dem Jahr 517 schreibt man z.B. 5173, aber 1024 schreibt man immer noch als 1024.

Sei $S \subseteq \mathbb{N}$ die Menge der Jahre, in denen das Sommerfest in Estlingen stattfindet, und $S' \subseteq \mathbb{N}$ die Menge der gleichen Jahre in Estlinger Form. Es gilt also $x \in S$ genau dann, wenn x gerade ist und $x \in S'$, oder wenn x ungerade ist und $10x + 3 \in S'$. Außerdem gilt $0 \notin S$.

(a) Theo will den Test lösen. Dafür möchte er sich ein Verfahren ausdenken, mit dem er berechnen kann, in welchen Jahren das Sommerfest in Estlingen ausgetragen wurde. Schreiben Sie also ein `WHILE`-Programm, das die charakteristische Funktion $\chi_{S'}$ berechnet (siehe Definition 5.28). Verwenden Sie in Ihrem `WHILE`-Programm den zusätzlichen Befehl `dora`; nach Ausführung von `dora` wird x_0 auf 1 gesetzt, falls $x_1 \in S$, sonst auf 0. (dora berechnet also χ_S.) Erklären Sie ihren Ansatz in natürlicher Sprache.

Sie dürfen alle Makros aus der Vorlesung verwenden (z.B. `MOD`, `DIV`) sowie eigene definieren.

(b) Zeigen Sie, dass S' reduzierbar auf S ist, indem sie eine berechenbare, totale Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ angeben, sodass $x \in S' \Leftrightarrow f(x) \in S$ für jedes $x \in \mathbb{N}$ gilt.

Sie müssen die Funktion nicht in geschlossener Form angeben, eine präzise Beschreibung genügt.

Quizaufgabe H10.3. (*Auf- und Ab*) unkorrigiert (8 Punkte)

Wir betrachten folgende Eigenschaften: (1) abzählbar, (2) rekursiv aufzählbar, (3) semientscheidbar, und (4) entscheidbar. Geben Sie für jede der folgenden Mengen an, welche der vier Eigenschaften erfüllt sind. Bitte beachten Sie, dass (2-4) nur auf Sprachen definiert sind.

(a) $\emptyset$

(b) $\{w \in \mathbb{R} : w < \frac{1}{\sqrt{2}}\}$

(c) $\{w \in \{0, ..., 9\}^* : (\texttt{0.}w)_{10} < \frac{1}{\sqrt{2}}\}$

(d) $\{w \in \{0,1\}^* : \{1, 10, 111\} \cap L(M_w) \neq \emptyset\}$

(e) $\{w \in \{0,1\}^* \mid \forall v \in L(M_w) : (7(v)_2 - 31)^2 > 8\}$

(f) $\{w \in \{0,1\}^* : M_w$ hält für ein $v \in \{0,1\}^*$ in $|v|$ Schritten$\}$

Für (c) verwenden wir die Notation aus H5.7.

Knobelaufgabe H10.4. (*Quine*)

Wir betrachten die Programmiersprache `STRING`. Ähnlich zu `WHILE` und `GOTO` verwendet ein Programm Register $x_0, ..., x_k$, diese haben nun aber Werte in Σ^*, mit Alphabet $\Sigma := \{\texttt{a}, ..., \texttt{z}, \texttt{0}, ..., \texttt{9}, \texttt{:}, \texttt{=}\}$. Seien $i, j, k \in \mathbb{N}$, $w \in \Sigma^*$, und P_1, P_2 `STRING`-Programme. Die gültigen `STRING`-Programme sind:

- $x_i := |w| : w$ setzt Register x_i auf w (z.B. `x1:=4:theo`, die Länge von w gefolgt von einem Doppelpunkt und w selbst – dies erlaubt, Sonderzeichen in w zu verwenden)
- $x_i := x_j x_k$ setzt x_i auf die Konkatenation der Werte von x_j und x_k
- $x_i :=$ `len` x_j setzt x_i auf die Länge des Wertes von x_j, als Dezimalzahl kodiert
- $x_i :=$ `pop` x_j entfernt das letzte Zeichen von x_j und schreibt es in x_i (wenn $x_j \neq \varepsilon$)
- `while` x_i `do` P_1 `end` führt P_1 aus, solange $x_i \neq \varepsilon$
- $P_1 P_2$ führt zunächst P_1 aus und dann P_2.

Diese Programme kodieren wir als Wort über Σ^*, z.B.

```
x2 := 5:olleh
x1 := x1 x2
while x1 do
    x2 := pop x1
    x0 := x0 x2
end
```

(Leerzeichen und Zeilenumbrüche sind nur zur besseren Lesbarkeit eingefügt worden, und nicht Teil des Programmtextes.) `STRING`-Programme berechnen partielle Funktionen $f : (\Sigma^*)^k \to \Sigma^*$, wobei die Eingabe in Registern $x_1, ..., x_k$ steht, alle anderen Register auf ε initialisiert werden, und das Ergebnis in x_0 ausgegeben wird. Obiges Beispiel berechnet also die Funktion $f(w) = \texttt{hello}\, w^R$, etwa $f(\texttt{:dlrow}) = \texttt{hello:world}$.

Sei $w \in \Sigma^*$ und P_w das `STRING`-Programm, das über w kodiert wird. Konstruieren Sie ein w, sodass P_w eine Funktion f mit $f(\varepsilon) = w$ berechnet.

Hinweis: Nicht alle Anweisungen von `STRING`-Programmen sind zum Lösen dieser Aufgabe notwendig; obige Definition stellt sicher, dass `STRING` Turing-vollständig ist. Sie finden einen Interpreter für `STRING` unter diesem Link.