

Einführung in die Theoretische Informatik

Sommersemester 2024 – Hausaufgabenblatt 9

Abgabe: 24.06.2024, 12:00 CEST

$w' \# w_{\perp} \in \mathcal{H}_{NEQ}$

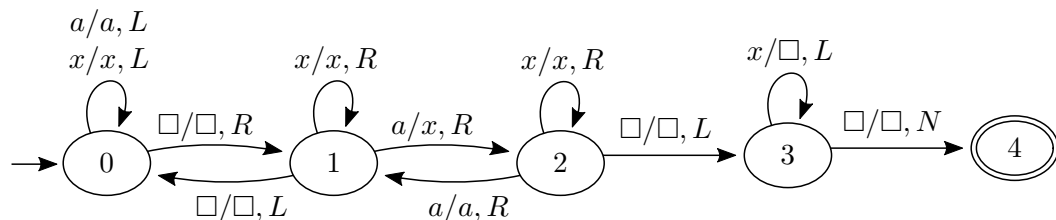
- Die Aufgaben werden in folgender Reihenfolge korrigiert: **H9.1**, **H9.2**.
- Die Knobelaufgabe bitte separat auf Moodle abgeben. Sie wird korrigiert.

Aufgabe H9.1. (*Jeu de mots*)

4+4+4 Punkte

Ihr Freund, der Archäologe Jasper Vazarie, hat einige Programme ausgegraben, und braucht Ihre Hilfe, um deren Bedeutung zu verstehen. Begründen Sie jeweils Ihre Antwort und beschreiben Sie, wieso die Programme funktionieren.

- (a) Folgende Maschine wurde als Grabbeigabe (neben zwei Ringen) in Uruk gefunden. Welche Sprache $L \subseteq \{a\}^*$ akzeptiert sie?



- (b) Überlieferungen zufolge hatte der Hochpriester von Nakbé folgendes Programm verwendet, um seine Entscheidungen zu begründen. Welche Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ berechnet es?

Hinweis: Zu Beginn steht der Input in x_1 , und alle anderen Register sind 0. Der Output steht am Ende in x_0 . (siehe Definition 5.20 auf Folie 252)

```

 $x_0 := z + 1$ 
 $i := z + 1$ 
 $t := x_1 - 1$ 
while  $t \neq 0$  do
     $i := i + 2$ 
     $t := i + 0$ 
    while  $t \neq 0$  do
         $x_0 := x_0 + 1$ 
         $t := t - 1$ 
     $t := x_1 + 0$ 
     $k := x_0 + 0$ 
    while  $k \neq 0$  do
         $k := k - 1$ 
         $t := t - 1$ 
    
```

- (c) Folgende Wegbeschreibung wurde neben einer römischen Straße im heutigen Italien entdeckt. Welche Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ berechnet sie?

```

Geata:  if  $x_1 \leq 1$  goto Roma
         $p := 1$ 
Labici:  $p := p + 1$ 
         $t := x_1 \text{ MOD } p$ 
        if  $t \neq 0$  goto Labici
Ardea:   $x_1 := x_1 \text{ DIV } p$ 
         $t := x_1 \text{ MOD } p$ 
        if  $t = 0$  goto Ardea
         $x_0 := x_0 + 1$ 
         $x_1 := x_1 * x_1$ 
        goto Geata
Roma:   HALT

```

Hinweise: Zu Beginn steht der Input in x_1 , und alle anderen Register sind 0. Der Output steht am Ende in x_0 . Beachten Sie, dass hier die syntaktischen Abkürzungen von Folie 245 verwendet wurden. Insbesondere ist $x \text{ DIV } y$ die (abgerundete) Division von x durch y , und $x \text{ MOD } y$ der verbleibende Rest. Außerdem verwenden wir $x \leq k$ und $x \neq k$ für ein Register x und $k \in \mathbb{N}$, mit der offensichtlichen Bedeutung.

Aufgabe H9.2. (*Unbegrenzte Macht*)

2+2+3 Punkte

Eines Nachts kam ein Bewohner eines anderen Universums zu Dr. Evilsparza und gab ihm eine Maschine, die die Grenzen unseres Universums transzendiert. Sie konnte nicht nur das Halteproblem lösen, sondern *jedes* Problem! Dr. Evilsparza war begeistert, doch als er diese Maschine benutzen wollte, um die Welt zu erobern, wachte er auf.

Wir definieren nun verschiedene Versionen von *unendlichen Turing-Maschinen* (∞ TMs). Sei $L \subseteq \{a\}^*$ eine beliebige Sprache. Geben Sie für jede der Versionen eine ∞ TM $M = \{Q, \{a\}, \Gamma, \delta, q_0, \square, F\}$ mit $L(M) = L$ an und beschreiben Sie kurz Ihre Idee. (Sie dürfen die ∞ TM mithilfe einer Skizze angeben.)

- Eine ∞ TM ist genauso definiert wie eine TM, mit dem Unterschied, dass die Menge Q der Zustände unendlich sein darf.
- Eine ∞ TM ist eine ∞ -Band-TM, also eine TM mit unendlich vielen Bändern. Die Übergangsfunktion ist also eine Funktion $\delta : Q \times \Gamma^\omega \rightarrow Q \times \Gamma^\omega \times \{L, R, N\}^\omega$, die von allen Bändern gleichzeitig liest, auf alle Bänder gleichzeitig schreibt, und sich auf allen Bändern gleichzeitig bewegt. Am Anfang steht die Eingabe auf dem ersten Band und alle anderen Bänder sind leer.

Erinnerung: Sei A ein Alphabet. Für ein Wort $w \in A^+$ ist w^ω das unendliche Wort $www \dots$. A^ω ist die Menge aller unendlichen Wörter über A , d.h. die Menge $\{w_1 w_2 w_3 \dots \mid \forall i \in \mathbb{N}_+ : w_i \in A\}$.

- Eine ∞ TM ist genauso definiert wie eine TM, mit dem Unterschied, dass das Bandalphabet Γ unendlich sein darf.

Quizaufgabe H9.3. (*Gelangwhiled?*)

unkorrigiert (8 Punkte)

Doras Kindergartenprofessor steht leider im Stau, und die Kindergartenkinder wissen nicht, was sie mit ihrer Zeit anfangen sollen. Ehe es einen Aufstand gibt, beschließen

Sie die Kinder zu unterhalten, indem Sie die Konvertierung von WHILE-Programmen zu deterministischen Turingmaschinen erklären.

- (a) Sei $\Sigma := \{0, 1\}$. Geben Sie eine TM M^0 an, die die Funktion $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ berechnet, mit $f(w) = 0$ für alle w .
- (b) Geben Sie eine TM M^- an, die eine Funktion $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ berechnet, wobei $f(\text{bin}(i)) := \text{bin}(i - 1)$ für alle $i \in \mathbb{N}_{>0}$ gilt, und $f(0) := 0$.

(Wie aus der Vorlesung bekannt, bezeichnet $\text{bin}(i)$ die Binärdarstellung von i , also das kürzeste $w \in \{0, 1\}^+$ mit $(w)_2 = i$.)

Im Folgenden seien die TMs aus (a) und (b) so modifiziert, dass sie auf einem beliebigen (aber festen) Band einer k -Band-TM operieren. Wir nennen die Version von M^- , die auf Band i operiert, $\text{dec}(i)$. Ebenso sei $\text{setzero}(i)$ die Version von M^0 , die auf Band i arbeitet. Zusätzlich verwenden wir $\text{inc}(i)$ für die angepasste TM aus Beispiel 5.13 (Binär +1), und $\text{iszero}(i)$ für die „Band $i = 0$?“ TM von Folie 247.

- (c) Seien $n, i \in \mathbb{N}$ fix. Konstruieren Sie nun eine k -Band TM $\text{add}(i, n)$, die die Binärzahl auf Band i um n erhöht, und eine k -Band TM $\text{sub}(i, n)$, die die Binärzahl auf Band i um n senkt (statt negativen Ergebnissen ergibt sich 0).

Hinweis: Hier (und im Folgenden) bietet sich die Notation zur sequentiellen Komposition aus der Vorlesung an (Folie 246).

- (d) Konstruieren Sie eine k -Band TM $\text{copy}(i, j)$, die das WHILE-Programm $x_i := x_j$ simuliert.
- (e) Konvertieren Sie nun folgendes WHILE-Programm, das eine Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ berechnet, zu einer k -Band TM:

```

while  $x_1 \neq 0$  do
   $x_2 := 0$ 
  while  $x_1 \neq 0$  do
     $x_1 := x_1 - 2$ 
     $x_2 := x_2 + 1$ 
   $x_1 := x_2$ 
 $x_0 := x_0 + 1$ 

```

Knobelaufgabe H9.4. (Permutation)

Sei $\Sigma := \{a, b\}$. Für ein Wort $w \in \Sigma^*$ mit $w = w_1w_2\dots w_n$ definieren wir nun die Menge der *Permutationen* von w als

$$\text{Perm}(w) := \{w_{f(1)}w_{f(2)}\dots w_{f(n)} \mid f : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\} \text{ bijektiv}\}$$

Beispielweise gilt $\text{Perm}(abaa) = \{aaab, aaba, abaa, baaa\}$. Wir erweitern dies auf Sprachen, für $L \subseteq \Sigma^*$ gilt also $\text{Perm}(L) := \bigcup_{w \in L} \text{Perm}(w)$.

Zeigen Sie, dass $\text{Perm}(L)$ kontextfrei ist, wenn L regulär ist.