

Einführung in die Theoretische Informatik

Sommersemester 2024 – Hausaufgabenblatt 6

Abgabe: 03.06.2024, 12:00 CEST

- Die Aufgaben werden in folgender Reihenfolge korrigiert: **H6.3**, **H6.5**, **H6.2**, **H6.4**.
- Die Knobelaufgabe bitte separat auf Moodle abgeben. Sie wird korrigiert.

AT-Aufgabe H6.1. (*Sabcxsaa*)

unkorrigiert (6 Punkte)

Sei $\Sigma := \{a, b, x, y\}$, und sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine kontextfreie Grammatik mit den Produktionen

$$\begin{array}{ll} S \rightarrow ABC \mid xS \mid AA & A \rightarrow a \mid \varepsilon \mid C \\ B \rightarrow CBB \mid b & C \rightarrow yC \mid x \end{array}$$

Konvertieren Sie G mit dem aus der Vorlesung bekannten Verfahren schrittweise zur Chomsky-Normalform, indem Sie G so anpassen, dass für jede Produktion $\alpha \rightarrow \beta$ folgende zusätzlichen Einschränkungen gelten:

- (a) $\beta \in \Sigma \cup V^*$ (b) $|\beta| \leq 2$ (c) $\beta \neq \varepsilon$ (d) $\beta \notin V$

Sie sollen also eine Grammatik G' angeben, die (a) und $L(G') = L(G)$ erfüllt, eine Grammatik G'' , die (a), (b) und $L(G'') = L(G)$ erfüllt, usw. Geben Sie ihre Lösung für (d), also die Grammatik in CNF, auf Automata Tutor ab.

Hinweis: Nichtterminale können in AT nur aus einem einzigen Großbuchstaben bestehen. Nennen Sie also Nichtterminale wie X_a und X_{AB} passend um.

Aufgabe H6.2. (*Der Wald vor lauter Bäumen*)

1+3+2 Punkte

Der kleine Theo sollte eigentlich seine Hausaufgaben machen, ist aber stattdessen in den Wald gegangen, um Bäume zu zählen. Können Sie ihm helfen?

Sei $G = (V, \{a\}, P, S)$ eine kontextfreie Grammatik mit genau $k \geq 1$ Nichtterminalen, sei $n \in \mathbb{N}$ mit $w = a^{n+1} \in L(G)$.

Hinweis: Die n -te Catalan-Zahl C_n ist (unter anderem) die Anzahl der vollen Binärbäume (d.h. alle Knoten haben entweder 2 oder 0 Kinder) mit $n+1$ Blättern. Sie dürfen die Catalan-Zahlen in Ihrer Lösung verwenden, ohne ihren Zahlenwert zu nennen.

- Nehmen wir an, dass die rechte Seite jeder Produktion höchstens 2 Zeichen lang ist. Wie viele Syntaxbäume hat w höchstens? Begründen Sie Ihre Antwort.
- Nehmen wir an, dass G in CNF ist. Wie viele Syntaxbäume hat w höchstens? Begründen Sie Ihre Antwort.
- Geben Sie eine Grammatik G' in CNF für die Sprache $\{a^3, a^8\}$ an. G' darf höchstens 5 Produktionen enthalten. Beachten Sie, dass z.B. $S \rightarrow AB \mid CD$ zwei Produktionen sind.

Aufgabe H6.3. (*Matriririkelnnunnummern*)

5 Punkte

An der Technischen Hochschule Estlingen-Oberfeld werden Matrikelnummern nach einem kuriosen System vergeben: Matrikelnummern müssen Zahlen sein, deren Quersumme eine Primzahl ist, eine alte Estlinger Tradition. Nun hält der technische Wandel auch

nicht vor Estlingen-Oberfeld ein, und der Rektor versucht verzweifelt, eine kontextfreie Grammatik zu finden, die alle korrekten Matrikelnummern erzeugt.

Sei $\Sigma := \{0, \dots, 9\}$. Zeigen Sie, dass die Sprache $L := \{w \in \Sigma^* : \sum_{i \geq 1} w_i \text{ prim}\}$ nicht kontextfrei ist.

Aufgabe H6.4. (*Die eine Deutung*)

7 Punkte

Zeigen Sie, dass die Grammatik $G := (\{E, T, F\}, \Sigma, P, E)$ mit $\Sigma = \{(\cdot), 0, 1, +, *\}$ und P :

$$E \rightarrow T \mid E + T \quad T \rightarrow F \mid T * F \quad F \rightarrow 0 \mid 1 \mid (E)$$

(siehe Ü6.3) eindeutig, d.h. nicht mehrdeutig, ist.

Sie dürfen folgende Aussage ohne Beweis verwenden¹:

$$\text{Jedes Wort in } L_G(E) \cup L_G(T) \cup L_G(F) \text{ ist wohlgeklammert.} \quad (1)$$

(Quiz-)Aufgabe H6.5. (*Auf den Hund gekommen*)

4+4 Punkte

Da Theo gerade zu beschäftigt damit ist, Bäume zu zählen, hat er seine Hausaufgaben von seinem Hund Trodo machen lassen. Leider hat Trodo die Aufgabenstellung nicht zu Ende gelesen, und ein paar wichtige Angaben nicht berücksichtigt. Theo hat aber eine Idee: vielleicht kann er die Grammatik von Trodo leicht anpassen und die Aufgabe so ohne viel Aufwand lösen.

Sei $\Sigma := \{a, b\}$ und $L \subseteq \Sigma^+$ eine kontextfreie Sprache. Konstruieren Sie eine kontextfreie Grammatik G' für die Sprachen

- (a) L^a
- (b) $\{w \in L : |w| \equiv 0 \pmod{7}\}$

Hinweis: Sie können die Chomsky-Normalform verwenden und annehmen, dass eine Grammatik G in CNF mit $L(G) = L$ existiert.

Knobelaufgabe H6.6. (*Quadrat ist praktisch schlecht*)

Sei $n \in \mathbb{N}$, $\Sigma := \{1, \dots, n\}$ und $L := \{w_1 w_2 \dots w_k : w_1, w_2, \dots, w_k \in \Sigma, w_1 < w_2 < \dots < w_k\}$. Mit $n = 5$ gilt z.B. $\varepsilon, 12345, 145 \in L$ und $321, 141, 1335 \notin L$.

Zeigen Sie, dass es einen NFA N mit $L(N) = L$ gibt, sodass N genau $n + 1$ Zustände und höchstens $100n(\log_2 n)^2$ Transitionen hat. Sie dürfen hierfür einen NFA mit mehreren Startzuständen konstruieren.

Anmerkung: Diese Aufgabe ist schwierig. Falls keine korrekte Lösung abgegeben wird, bleibt die Musterlösung vielleicht geheim.

¹Ein Wort w ist wohlgeklammert, falls $|w|_{(} = |w|_{)}$ gilt und falls für alle Präfixe u von w $|u|_{(} \geq |u|_{)}$ gilt.