Prof. Javier Esparza
Philipp Czerner, Kevin Kappelmann, Valentin Krasotin

Technische Universität München
Lehrstuhl für Theoretische Informatik

Einführung in die Theoretische Informatik

Sommersemester 2024 – Hausaufgabenblatt 5

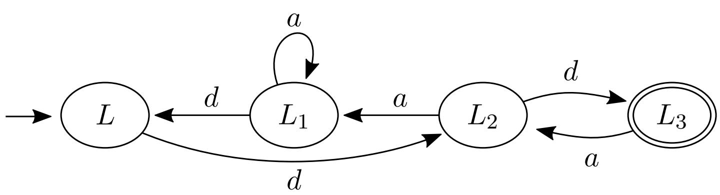
Abgabe: 06.06.2022, 12:00 CEST

- Die Hausaufgaben werden in folgender Reihenfolge korrigiert: H5.4, H5.3.
- Die Knobelaufgabe bitte separat auf Moodle abgeben. Sie wird korrigiert.

AT-Aufgabe H5.1. *(dada)* unkorrigiert (1+1+1 Punkte)

Bearbeiten Sie diese Aufgabe in Automata Tutor. Der kleine Theo ist schon wieder traurig. Er würde gerne Kekse backen, muss aber zuerst herausfinden, welche Wörter sein noch kleinerer Neffe schon sagen kann. Theo hat anhand der Gesichtsausdrücke seines Neffen einen DFA erstellt, will jetzt aber wissen, welche Wörter für welche Miene möglich sind.

Abgebildet ist der kanonische Minimalautomat für $L = L(d(aa^*dd \mid da)^*d)$, fehlende Kanten führen zu einem impliziten Fangzustand. Geben Sie reguläre Ausdrücke für L_1, L_2, L_3 an. (Zur Erinnerung: Im kanonischen Minimalautomaten sind die Zustände mit Residualsprachen beschriftet.)



AT-Aufgabe H5.2. unkorrigiert (2+2 Punkte)

Bearbeiten Sie diese Aufgabe in Automata Tutor. Konstruieren Sie eine kontextfreie Grammatik für die folgenden Sprachen:

(a) $\{a^i b^j a^j b^i : i, j \geq 0\}$ (b) $\{a^i b^j c^k : j \geq i + k\}$

Aufgabe H5.3. *(DER SATZ!)* 3 + 3 + 3 Punkte

Führen Sie für jede dieser Sprachen Folgendes durch:

Falls die Sprache regulär ist, zeichnen Sie den kanonischen Minimalautomaten und beschriften Sie die Zustände mit regulären Ausdrücken für die entsprechenden Residualsprachen. Falls die Sprache nicht regulär ist, reicht es eine unendliche Menge von Wörtern mit unterschiedlichen Residualsprachen zu bestimmen und zu zeigen, dass diese Residualsprachen paarweise verschieden sind.

(a) $L_1 \coloneqq L((ba \mid ab)^*)$ mit dem Alphabet $\Sigma \coloneqq \{a, b\}$

(b) $L_2 \coloneqq \{a^{2^k} \mid k \in \mathbb{N}\}$ mit dem Alphabet $\Sigma \coloneqq \{a\}$

(c) $L_3 \coloneqq \{w \in \Sigma^* \mid |w|_{ab} \neq |w|_{ba}\}$ mit dem Alphabet $\Sigma \coloneqq \{a, b\}$, wobei $|w|_v$ die Anzahl der Vorkommnisse des Wortes v im Wort w zählt. Beispielsweise gilt $|ababb|_{ab} = 2$ und $|ababb|_{ba} = 1$.

Aufgabe H5.4. (*The signs were there.*) 4+2+3+1 Punkte

Der Superschurke Dr. Evilsparza hat beschlossen, seinen Lebensstil grundlegend zu überdenken. Die ständigen Versuche, eine Zombiearmee aufzubauen oder einen Superlasersatelliten zu starten, sind einfach nicht gut für seine Gesundheit. Deswegen wendet er sich nun der Finanzkriminalität zu.

Sei $\Sigma := \{\texttt{+}, \texttt{-}\}$. Wir betrachten ein Bankkonto, dessen Guthaben über eine Transaktion um 1 erhöht oder gesenkt werden kann. Eine Folge von Transaktionen wird dargestellt über ein Wort in Σ^*. Wir wollen nun überprüfen, dass das Konto zu keinem Zeitpunkt überzogen wurde. Wir definieren dazu den Effekt einer Transaktion $w \in \Sigma^*$ als $\Delta(w) := |w|_{\texttt{+}} - |w|_{\texttt{-}}$ und nennen w *überziehend*, wenn es ein i gibt, sodass $\Delta(w_1...w_i) < 0$. Wir definieren L als die Sprache der Wörter, die *nicht* überziehend sind. Es gilt also z.B. $\varepsilon, \texttt{++-+-}, \texttt{+-++-} \in L$ und $\texttt{-+}, \texttt{+-+--++} \notin L$.

Sei $G = (\{S\}, \{\texttt{+}, \texttt{-}\}, P, S)$ die Grammatik mit den Produktionen $S \to \texttt{+}S\texttt{-}S \mid \texttt{+}S \mid \varepsilon$.

(a) Zeigen Sie $L(G) \subseteq L$ mit struktureller Induktion.

(b) Zeigen Sie, dass jedes Wort $w \in L \setminus \{\varepsilon\}$ sich in $w = \texttt{+}u\texttt{-}v$ oder $w = \texttt{+}u$ zerlegen lässt, mit $u, v \in L$.

(c) Verwenden Sie (b) und beweisen Sie $L(G) \supseteq L$.

(d) Ist G mehrdeutig? Begründen Sie Ihre Antwort.

Quizaufgabe H5.5. (*Gib mir ein a!*) unkorrigiert (3 Punkte)

Sei $G = (\{S, A, B, C\}, \{a, b\}, P, S)$ eine Grammatik mit den Produktionen

$$S \to AB \mid BC \qquad A \to AA \mid a$$
$$B \to ABA \mid BCB \mid b \qquad C \to ab \mid ba$$

Sind die folgenden Wörter in $L(G)$ enthalten? Falls ja, geben sie einen Syntaxbaum und eine Linksableitung an, falls nein, begründen Sie dies *kurz*.

(a) ε (b) $aababb$ (c) $abaabbba$ (d) $abaabbbba$

Quizaufgabe H5.6. (*Do you even pump?*) unkorrigiert (5 Punkte)

Sei $\Sigma := \{a, b\}$. Beweisen oder widerlegen Sie, dass die folgenden Sprachen regulär sind. Bitte beachten Sie, dass es beim Beweisen von Regularität regelmäßig nicht genügt, einen entsprechenden Automaten anzugeben – zumindest eine Begründung ist erforderlich. Um zu widerlegen, dass eine Sprache regulär ist, steht Ihnen die Wahl der Beweistechnik (Pumping Lemma, unendlich viele Residualsprachen) frei.

Wie üblich schreiben wir $|x|_v := |\{u : x = uvw,\ u, w \in \Sigma^*\}|$ für die Anzahl der Vorkommnisse des Wortes $v \in \Sigma^*$ in $x \in \Sigma^*$, z.B. gilt $|abbbabb|_{bb} = 3$.

(a) $L = \{w \in \Sigma^* : |w|_{aa} = |w|_{bb}\}$

(b) $L = \{w \in \Sigma^* : |w|_{ab} = |w|_{ba}\}$

Knobelaufgabe H5.7. (*Irrational irregulär*)

Sei $\Sigma := \{\texttt{0}, ..., \texttt{9}\}$. Für Wörter $u, v \in \Sigma^*$ bezeichnen wir mit $(u.v)_{10} := (u)_{10} + 10^{-|v|} \cdot (v)_{10}$ den Wert eines Dezimalbruches, es gilt also z.B. $(\texttt{1.75})_{10} = \frac{7}{4}$.

Sei $\gamma \in \mathbb{R}$, $0 \leq \gamma < 1$. Zeigen Sie, dass $\{w \in \Sigma^* : (\texttt{0.}w)_{10} \leq \gamma\}$ genau dann regulär ist, wenn γ rational ist.