

## Einführung in die Theoretische Informatik

Sommersemester 2024 – Hausaufgabenblatt 4

**Abgabe: 20.05.2024, 12:00 CEST**

- Die Hausaufgaben werden in folgender Reihenfolge korrigiert: **H4.3, H4.4.**
- Die Knobelaufgabe bitte separat auf Moodle abgeben. Sie wird korrigiert.

### AT-Aufgabe H4.1. (*sic in fit*)

unkorrigiert (1+1+1 Punkte)

Bearbeiten Sie diese Aufgabe in [Automata Tutor](#). Bestimmen Sie einen regulären Ausdruck für die Residualsprache  $L(r)^a$  für jeden der folgenden REs  $r$ .

(a)  $ab(aa|bb)^*|ba$

(b)  $(abb|baa)^*$

(c)  $(ab|a)^*ab$

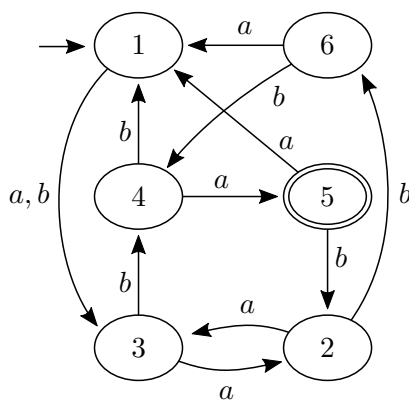
### AP-Aufgabe H4.2. (*in nuce*)

unkorrigiert (2+2 Punkte)

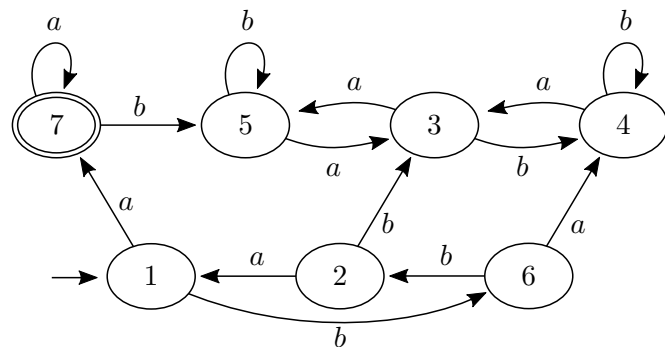
Doras Kindergarten hat beschlossen, namenstreu zu werden, und die minderjährigen Mitglieder dürfen sich nunmehr botanisch betätigen. Dora kümmert sich gerade begeistert um eine Amaryllis. Leider ist diese zu groß für den dafür vorgesehenen Topf. Können Sie Doras fabelhafte Amaryllis verkleinern?

**Update:** Bearbeiten Sie diese Aufgabe auf apotheosis: (a), (b).

Minimieren Sie folgende DFAs unter Verwendung des erweiterten Minimierungsalgorithmus aus Ü4.5(b).



(a)



(b)

*Anmerkung:* Zusätzlich gibt es diese Aufgabe auch auf [Automata Tutor](#). Allerdings überprüft AT nur den resultierenden DFA.

### Aufgabe H4.3. (*nil satis nisi optimum*)

2+4 Punkte

Dora hat in ihrer Kindergartenvorlesung gelernt, wie die Produkt-Konstruktion funktioniert. Jetzt ist ihr aber aufgefallen, dass der entstandene Produktautomat nicht minimal sein muss! Entrüstet möchte sie zu ihrem Kindergartenprofessor stampfen, ihn mit Sand

bewerfen, und sich darüber beschweren, dass er ihr ein offensichtlich minderwertiges Verfahren beigebracht hat. Können Sie Dora beschwichtigen, indem Sie demonstrieren, dass das Verfahren, zumindest manchmal ein bestmögliches Ergebnis liefert?

Sei  $\Sigma := \{a, b\}$ ,  $A_k := \{w \in \Sigma^* : |w|_a \geq k\}$  die Sprache aller Wörter, die mindestens  $k$ -mal  $a$  enthalten, und  $B_k := \{w \in \Sigma^* : |w|_b \geq k\}$  entsprechend für  $b$ .

- (a) Seien  $k, n \in \mathbb{N}$  und  $L := A_k \cap B_n$ . Bestimmen Sie alle Residualsprachen von  $L$ . Begründen Sie Ihre Antwort.

**Hinweis:**  $L$  hat genau  $(k+1)(n+1)$  Residualsprachen.

- (b) Beweisen Sie, dass Ihre Residualsprachen aus (a) paarweise unterschiedlich sind.

Dora versteht nun, worauf Sie hinauswollen: Die Anzahl der Zustände im minimalen DFA ist gleich der Anzahl der Residualsprachen. Der minimale DFA für  $A_k$  hat  $k+1$  Zustände (da  $A_k = A_k \cap B_0$ ) und der minimale DFA für  $B_n$  hat  $n+1$  Zustände. Durch Anwenden der Produktkonstruktion auf diese beiden DFAs erhält man einen DFA mit höchstens  $(k+1)(n+1)$  Zuständen – der muss aber minimal sein, da  $A_k \cap B_n$  genau so viele Residualsprachen besitzt.

**(Quiz)Aufgabe H4.4.** (*vero nihil verius*)

5 Punkte

Eigentlich sollte der kleine Theodor seine Hausaufgaben machen. Er würde aber viel lieber seiner Lieblingspfütze beim Trocknen zuschauen, und hat deshalb die Hausaufgaben von seinem Hund Trodo machen lassen. Nun ist sich Theo aber nicht ganz sicher, ob Trodo auch alles richtig gemacht hat.

Bestimmen Sie für folgende Aussagen, ob sie wahr oder falsch sind. Geben sie eine kurze Begründung für wahre Aussagen an und ein Gegenbeispiel für falsche.

Sei  $\Sigma \neq \emptyset$  ein Alphabet. Für alle regulären Sprachen  $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ , und nicht-regulären Sprachen  $L_3, L_4 \subseteq \Sigma^*$  gilt:

- (a)  $(L_1 \cap L_2)^2$  ist regulär.  
 (b)  $L_3 \cup L_4$  ist nicht regulär.  
 (c)  $L_4$  erfüllt die Eigenschaft des Pumping-Lemmas nicht.  
 (d) Jede Teilmenge  $L \subseteq L_1$  ist regulär.  
 (e)  $(L_3)^*$  ist regulär.

**Quizaufgabe H4.5.** (*divide et impera*)

unkorrigiert (1+1+1 Punkte)

Sei  $\Sigma := \{a, b\}$ . Bestimmen Sie die Anzahl der Zustände des minimalen DFAs für die folgenden Sprachen.

- (a)  $L(ab | abb | abbb)$   
 (b)  $L((abab | abba)^*)$   
 (c)  $L(b(aaa^*b)^*a)$

**Knobelaufgabe H4.6.** (*pauca sed bona*)

Der Superschurke Dr. Evilparza hat jüngst ein Pharmaunternehmen (Evillest Evilness Inc.) gegründet, und behauptet nun, einen Impfstoff gegen schlechtes Wetter entwickelt zu haben. Die Öffentlichkeit ist begeistert – Sie trauen dem angeblich reformierten Sünder allerdings nicht und versuchen, in der DNA-Sequenz nach Hinweisen zu suchen.

Bekanntermaßen werden in der DNA vier verschiedene Basen kodiert: Evalcyclohexandifluorit, Isophoronditrigocyanat, Vinylcyclohexenquadroxid, und Levomethagameorphan. Diese werden mit ihrem Initialbuchstaben abgekürzt, sodass letztendlich ein Wort über dem Alphabet  $\Sigma := \{e, i, l, v\}$  entsteht.

Ihnen ist bereits aufgefallen, dass die Sequenz ein merkwürdiges Muster aufweist: Auf die Zeichenfolge *evi* folgt nie ein *l*. Dr. Evilsparza behauptet, dass das reiner Zufall ist, aber Sie sind nicht überzeugt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein (gleichmäßig) zufälliges Wort in  $\Sigma^{2024}$  obige Eigenschaft erfüllt.

**Hinweise:** Sie dürfen einen Computer verwenden. Es genügt, die Wahrscheinlichkeit auf 10 signifikante Nachkommastellen genau auszurechnen. Ein zufälliges Wort in  $\Sigma^{703}$  erfüllt die Eigenschaft mit Wahrscheinlichkeit ca. 0.06250879569.