Prof. Javier Esparza
Philipp Czerner, Kevin Kappelmann, Valentin Krasotin

Technische Universität München
Lehrstuhl für Theoretische Informatik

Einführung in die Theoretische Informatik

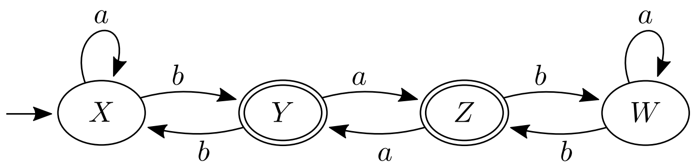
Sommersemester 2024 – Hausaufgabenblatt 3

Abgabe: 13.05.2024, 12:00 CEST

- Die Hausaufgaben werden in folgender Reihenfolge korrigiert: H3.4, H3.2, H3.3.
- Die Knobelaufgabe bitte separat auf Moodle abgeben. Sie wird korrigiert.

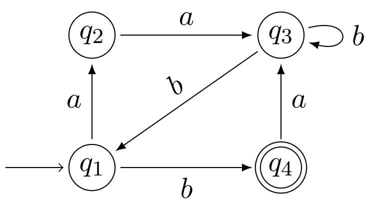
AT-Aufgabe H3.1. (*DFA zu RE*) unkorrigiert (3 Punkte)

Bearbeiten Sie diese Aufgabe in Automata Tutor. Konvertieren Sie den folgenden DFA M zu einem regulären Ausdruck, z.B. indem Sie ein geeignetes Gleichungssystem aufstellen und dieses lösen.



Aufgabe H3.2. (*Arden*) 3+1 Punkte

Gegeben sei folgender Automat $M = (\{q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{a, b\}, \delta, q_1, \{q_4\})$:



(a) Berechnen Sie einen regulären Ausdruck α mit $L(\alpha) = L(M)$. Verwenden Sie dafür das aus der Vorlesung bekannte Verfahren zum Lösen eines Gleichungssystems mit Hilfe von Ardens Lemma.

(b) Folgt aus der Gleichung $X \equiv (a \mid \epsilon)X \mid a$, dass $X \equiv (a \mid \epsilon)^* a$? Beweisen Sie die Implikation oder geben Sie ein Gegenbeispiel an (mit kurzer Begründung).

Aufgabe H3.3. (*ein paar as, dann ein b...*) 1+1+1 Punkte

Geben sie an, zu welchen regulären Ausdrücken die gleiche Sprache gehört. Geben Sie außerdem für jede Sprache, die Sie so identifizieren, ein Wort an, das nur in dieser Sprache liegt. Die sechs regulären Ausdrücke erzeugen drei unterschiedliche Sprachen.

Beispiel: Sie stellen fest, dass (1,2), (3,4) und (5,6) die gleiche Sprache erzeugen. Dann müssen Sie ein Wort in $L_{1,2} \setminus (L_{3,4} \cup L_{5,6})$ finden, eines in $L_{3,4} \setminus (L_{1,2} \cup L_{5,6})$, und eines in $L_{5,6} \setminus (L_{1,2} \cup L_{3,4})$.

Wie üblich schreiben wir r^+ anstelle von rr^* für einen regulären Ausdruck r.

(1) $b \mid a^+(baa^+)^*(b|bab)$

(2) $(a \mid ab)^+ \mid a(b^*a\emptyset)^+$

(3) $(a^+b)^*$

(4) $(aba \mid a)^*b$

(5) $a(a^*ba)^*a^*(b \mid \epsilon)$

(6) $\emptyset^* \mid a(a \mid ba)^*b$

Update: Sie können diese Aufgabe nun auch in apotheosis lösen.

Aufgabe H3.4. (*Pump für den Schurken*) 3+1+4 Punkte

In dieser Aufgabe nehmt Ihr die Rolle des trickreichen Superschurken Dr. Evilsparza ein. Seid bereit, möglichst großes Unheil anzurichten.

Mit eurem Kristallomaten beobachtet ihr – Dr. Evilsparzas – wie die tapferen Theo-Studierenden in Ü3.6 die Nicht-Regularität verschiedenster Sprachen mithilfe des Pumping-Lemmas bewiesen haben. Den vielen Erfolgen möchtet ihr natürlich schnell ein Ende bereiten, weswegen ihr euch in eure Werkstube begebt, um an trickreichen Sprachen zu tüfteln. Und nach kurzer Zeit ist es euch dann auch gelungen: eine teuflische Sprache, um die Studierenden in die Irre zu führen!

Um die Studierenden zu überlisten, fixiert ihr das Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$ und die folgenden Sprachen:

$$L_1 \coloneqq \{ab^nc^n \mid n \in \mathbb{N}_+\}, \quad L_2 \coloneqq \{a^lb^mc^n \mid l \in (\mathbb{N} \setminus \{1\}), m, n \in \mathbb{N}\}, \quad L_3 \coloneqq L_1 \cup L_2.$$

Mit der Sprache L_3, so eure Vermutung, werdet ihr die Studierenden so richtig übers Ohr hauen. Denn es ist eine nicht-reguläre Sprache, die dennoch die Bedingungen des Pumping-Lemmas erfüllt! Ihr freut euch schon darauf, wie die Studierenden aussichtslos und tagelang dennoch versuchen, Nicht-Regularität der Sprache mit dem Pumping-Lemma zu beweisen.

Bevor ihr nun aber die Falle einsetzt und euch an den Misserfolgen ergötzt, möchtet ihr natürlich sicherstellen, dass sie auch wirklich funktioniert...

(a) Zeigen Sie mithilfe des Pumping-Lemmas, dass L_1 nicht regulär ist.

(b) Zeigen Sie mithilfe des Ergebnisses aus (a) und der Abschlusseigenschaft von regulären Sprachen unter Schnitt ($\cap$), dass L_3 nicht regulär ist.

Hinweis: Nehmen Sie hierfür an, dass L_3 regulär ist und führen sie dies mit Hilfe der genannten Abschlusseigenschaft zu einem Widerspruch.

(c) Zeigen Sie, dass L_3 die Bedingungen des Pumping-Lemmas erfüllt.

Tipp: Machen Sie eine Fallunterscheidung, ob das zu zerlegende Wort in L_1 oder L_2 ist.

Quizaufgabe H3.5. (*Spieglein, Spieglein an der Wand...*) unkorrigiert (2+1+1 Punkte)

Sei $\Sigma := \{a, b\}$. Wie üblich definieren wir w^R als die Spiegelung des Wortes w. Für eine beliebige Sprache L definieren wir nun $L^R := \{w^R : w \in L\}$.

(a) Sei M ein NFA mit n Zuständen. Konstruieren Sie einen NFA für $L(M)^R$ mit höchstens $n + 1$ Zuständen.

(b) Sei r ein regulärer Ausdruck. Konstruieren Sie einen regulären Ausdruck r' für $L(r)^R$, dessen Länge mit r übereinstimmt.

Hinweise: Es bietet sich an, ähnlich zur strukturellen Induktion, ein rekursives Verfahren anzugeben. Die Länge eines regulären Ausdrucks ist die Länge der üblichen Darstellung im Alphabet $\{(,), *, |, \epsilon, \emptyset\} \cup \Sigma$, z.B. hat $(ab^* \mid \epsilon)$ Länge 7.

Knobelaufgabe H3.6. (*Nach den Sternen greifen*)

Sei L eine reguläre Sprache. Zeigen Sie, dass $L' := \{w : \{w\}^* \subseteq L\}$ regulär ist.