Lehrstuhl für Theoretische Informatik
Fakultät für Informatik
Technische Universität München

Eexam
Sticker mit SRID hier einkleben

Hinweise zur Personalisierung:

- Ihre Prüfung wird bei der Anwesenheitskontrolle durch Aufkleben eines Codes personalisiert.
- Dieser enthält lediglich eine fortlaufende Nummer, welche auch auf der Anwesenheitsliste neben dem Unterschriftenfeld vermerkt ist.
- Diese wird als Pseudonym verwendet, um eine eindeutige Zuordnung Ihrer Prüfung zu ermöglichen.

Einführung in die Theoretische Informatik

Klausur:	IN0011 / Probe	**Datum:**	Montag, 19. Juli 2021
Prüfer:	Prof. Dr. Dr. h.c. Javier Esparza	**Uhrzeit:**	14:00 – 17:00

Bearbeitungshinweise

- Diese Klausur umfasst **26 Seiten** mit insgesamt **9 Aufgaben**.
  Bitte kontrollieren Sie jetzt, dass Sie eine vollständige Angabe erhalten haben.
- Die Gesamtpunktzahl in dieser Prüfung beträgt 60 Punkte.
- Dies ist eine (leicht modifizierte) Version der Endterm-Prüfung vom SS2020.
- Sie müssen Ihre Klausur eingescannt bis 17:00:00 online auf TUMExam einreichen:
  - Sie müssen nur die von Ihnen bearbeiteten Seiten **und** das unterschriebene Deckblatt hochladen.
  - Achten Sie darauf, dass sowohl Ihre **Lösungen als auch die Barcodes klar lesbar** sind.
  - In begründeten Fällen (wie z.B. bei technischen Problemen) können Sie der Übungsleitung bis 17:00:00 per Email (theoleitung@in.tum.de) ihre Klausur zukommen lassen, als PDF oder SHA256-Prüfsumme.
- Sie müssen die Klausur alleine bearbeiten. Die Klausur ist open-book (Kofferklausur), allerdings dürfen Sie in keinster Weise Unterstützung von anderen Personen **erhalten** oder diesen **geben** (in Person, Chat, Foren, Diskussiongruppen, etc.). Eine solche Unterstützung wird als Unterschleif bewertet und mit den Konsequenzen, wie in der APSO beschrieben, geahndet.
- Sie dürfen jegliche Art von Literatur (auch im Internet) benutzen. Sollten Sie dabei auf Lösungsansätze stoßen, die Sie für die Klausur verwenden möchten, so müssen Sie diese Teile klar und deutlich zitieren (Literaturverweis bzw. Link). Die Lösung selber müssen Sie dennoch weiterhin selbstständig in die Klausur übertragen. Ihnen ensteht durch eine Zitation kein Nachteil.
- Mit * gekennzeichnete Teilaufgaben sind ohne Kenntnis der Lösung vorheriger Teilaufgaben lösbar.
- Sie dürfen Ergebnisse vorheriger Teilaufgaben auch dann verwenden, wenn Sie diese nicht lösen konnten.
- **Es werden nur solche Ergebnisse gewertet, bei denen der Lösungsweg erkennbar ist.** Alle Aufgaben sind **grundsätzlich zu begründen**, sofern es in der jeweiligen Teilaufgabe nicht ausdrücklich anders vermerkt ist.
- Schreiben Sie weder mit roter noch grüner Farbe.
- Ihre Lösungen müssen **handschriftlich** verfasst sein (digital oder auf Papier)!
- Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ enthalten die 0.

Aufgabe 1 **Rekursive Prozedur (8.5 Punkte)**

0 a)* Sei Σ ein Alphabet. Geben Sie die Rekursionsgleichungen für eine rekursive Prozedur contains(a, r) an, die für einen Buchstaben a $\in \Sigma$ und regulären Ausdruck r berechnet, ob a in jedem Wort aus $L(r)$ vorkommt. Es soll also
1 für alle $w \in L(r)$ gelten, dass $(\exists u, v \in \Sigma^*.\ w = u\mathrm{a}v) =: P(w)$.

0 b) Beweisen Sie mit Hilfe von struktureller Induktion, dass ihre Prozedur korrekt ist. Sie dürfen dabei den Konkatenationsfall (d.h. $r = r_1 r_2$) weglassen. Kennzeichnen Sie dabei die Induktionshypothesen und deren Anwendungen
1 deutlich.

2

3

4

5

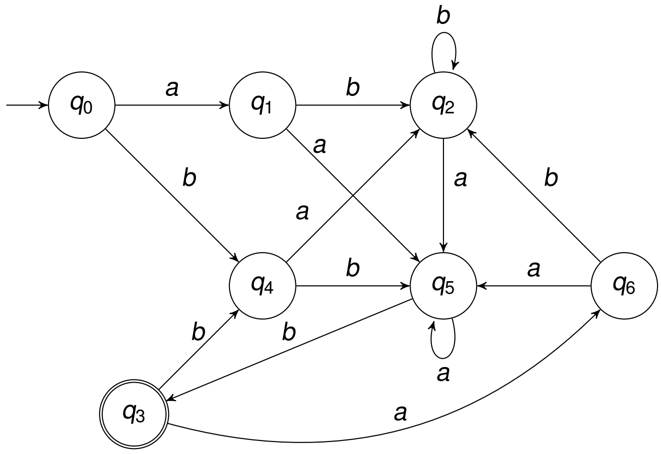
Lösungsbox Aufgabe 1 b) fortlaufend

0
1
2

c)* Angenommen wir erweitern die regulären Ausdrücke mit einem weiteren Konstruktor $\cap$, wobei wir $L(r_1 \cap r_2) \coloneqq L(r_1) \cap L(r_2)$ definieren. Zeigen Sie mit Induktion oder widerlegen Sie, dass die Rekursionsgleichung contains(a, $r_1 \cap r_2$) = contains(a, r_1) $\wedge$ contains(a, r_2) korrekt ist.

Aufgabe 2 **Myhill-Nerode-Äquivalenzklassen (9 Punkte)**

Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Wir betrachten den folgenden DFA M:



a)* Minimieren Sie den gegebenen DFA M. Geben Sie dazu die vollständige Minimierungstabelle nach Vorlesungsalgorithmus an und zeichnen Sie den resultierenden DFA.

b) Geben Sie für jeden Zustand des minimalen Automaten das Wort aus der entsprechenden Myhill-Nerode-Äquivalenzklasse an, welches das kleinste im Hinblick auf die lexikographische Ordnung $\prec$ ist (wobei $\epsilon \prec a \prec b \prec aa \prec ab \prec \cdots$), d.h. kürzere vor längeren Wörtern und punktweise a vor b.

c)* Sei n die Anzahl der Zustände des von Ihnen in Teilaufgabe a) konstruierten Automaten. Zeigen oder widerlegen Sie jeweils: Es gibt einen DFA M' mit n Zuständen, $L(M) = L(M')$ und M' besitzt

1. keine Schleife.
2. mindestens eine Schleife.

Als Schleife bezeichnen wir dabei Übergänge der Form $\delta(q, \mathrm{x}) = q$.

Lösungsbox Aufgabe 2 (Teilaufgabe bitte klar kennzeichnen)

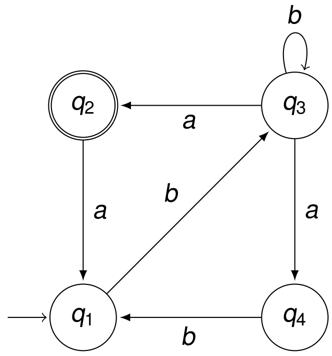
Lösungsbox Aufgabe 2 a)

Lösungsbox Aufgabe 2 b)

Lösungsbox Aufgabe 2 c)

Aufgabe 3 **NFA → RegEx (7 Punkte)**

Gegeben sei folgender Automat $M = (\{q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{a, b\}, \delta, q_1, \{q_2\})$:

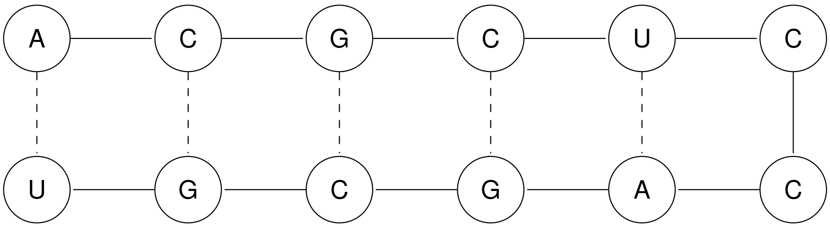


a)* Berechnen Sie einen regulären Ausdruck α mit $L(\alpha) = L(M)$. Verwenden Sie dafür das aus der Vorlesung bekannte Verfahren zum Lösen eines Gleichungssystems mit Hilfe von Ardens Lemma.

b)* Folgt aus der Gleichung $X \equiv (aa \mid \varepsilon)X \mid a$ dass $X \equiv (aa \mid \varepsilon)^{*}a$?
Beweisen Sie die Implikation oder geben Sie ein Gegenbeispiel an (mit kurzer Begründung).

Aufgabe 4 **Pumping Lemma (7.5 Punkte)**

a)* Ein RNA-Strang ist eine Kette von Nukleotiden, von denen es vier verschiedene, repräsentiert durch die Buchstaben A, C, G und U gibt. Wir betrachten einen RNA-Strang also als ein Wort über dem Alphabet $\Sigma = \{A, C, G, U\}$.
Dabei sind die Nukleotide A und U, sowie G und C, komplementär zueinander, was bedeutet, dass sie eine Verbindung eingehen können. Wir nennen zwei Wörter w und w' komplementär, wenn sie zeichenweise komplementär sind. Genauer gesagt muss $|w| = |w'|$ gelten und für jedes i mit $0 \leq i \leq |w|$ gelten, dass w_i komplementär zu w'_i ist. Ein RNA-Strang kann eine sogenannte Haarnadel Struktur bilden, wenn er sich in der Mitte in zwei komplementäre Teile falten lässt. Hier ein Beispiel für den Strang ACGCUCCAGCGU:



Wie Sie am Beispiel erkennen können, müssen die zwei Nukleotide genau in der Mitte des Strangs dabei nicht komplementär zueinander sein.
Formal definieren wir die Sprache der RNA-Stränge die eine Haarnadel bilden können als:

$$L = \{uxyv \mid x, y \in \Sigma, u, v \in \Sigma^+, u \text{ ist komplementär zu } v^R\}$$

Zeigen Sie, dass diese Sprache nicht regulär ist, indem Sie einen Widerspruchsbeweis mit Hilfe des Pumping Lemmas führen.

b)* Sei $r = 1^*011^*$ ein regulärer Ausdruck über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$. Finden Sie die kleinste Zahl k, die eine Pumping Lemma Zahl (Bezogen auf das Pumping Lemma für reguläre Sprachen) für $L(r)$ ist. Begründen Sie Ihre Aussage formal.

Lösungsbox Aufgabe 4 (Teilaufgabe bitte klar kennzeichnen)

Lösungsbox Aufgabe 4 a)

Lösungsbox Aufgabe 4 b)

Aufgabe 5 **Harper Lee (7 Punkte)**

Gegeben sei die kontextfreie Grammatik G über dem Alphabet $\Sigma \coloneqq \{0, 1\}$ mit Startsymbol Z und Produktionen $Z \to 10 \mid ZZ \mid 01$.

0 1 2 3 4

a)* Zeigen Sie $L(G) \subseteq \{w \in \Sigma^+ \mid |w|_1 = |w|_0\} =: L$ formell per Induktion über die Erzeugung von Wörtern $w \in L(G)$. Erinnerung: $|w|_a$ bezeichnet die Anzahl der Vorkomnisse von $a \in \Sigma$ in w.

0 1 2 3

b)* Zeigen oder widerlegen Sie $L = L(G)$ formell.

Lösungsbox Aufgabe 5 a)

Lösungsbox Aufgabe 5 b)

Aufgabe 6 Primitive Rekursion (3 Punkte)

Im SS21 haben wir *primitive Rekursion* nicht besprochen.
Somit ist diese Aufgabe im SS21 auch nicht relevant.

Zeigen Sie, dass die folgende Funktion $\mathit{test} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ primitiv rekursiv ist:

0
1
2
3

$$\mathit{test}(n) = \text{die niederwertigste Ziffer der Binärdarstellung von } n$$

wobei die Binärziffern 0 und 1 als natürliche Zahlen interpretiert werden.
Sie dürfen bei der Definition von *test* das erweiterte Schema der primitiven Rekursion benutzen. Als Hilfsfunktionen sind nur zugelassen: Konstanten (0, 1, 2, ...), und höchstens eine weitere einstellige, ebenfalls mit dem erweiterten Schema der primitiven Rekursion definierte Funktion. Sie dürfen keine weiteren Hilfsfunktionen definieren oder benutzen.
Die Korrektheit Ihrer Konstruktion müssen Sie nicht beweisen.

Lösungsbox Aufgabe 6

Aufgabe 7 **PCP (2 Punkte)**

0
1
2

Konstruieren Sie eine PCP Instanz I über dem Alphabet $\{0, 1\}$ sodass:

- I enthält genau 3 verschiedene Paare,
- $(10, 01) \in I$, und
- I hat eine Lösung i_1, i_2, i_3, aber keine kürzere Lösung.

Die Korrektheit ihrer Konstruktion müssen Sie nicht beweisen.

Lösungsbox Aufgabe 7

Aufgabe 8 **Picasso (9 Punkte)**

Ein *Malomat M* ist ähnlich zu einer deterministischen Turingmaschine, besitzt allerdings anstatt eines unendlich langen, eindimensionalen Bandes eine unendlich große, zweidimensionale Leinwand und kann sich zusätzlich auf und ab bewegen. Formal ist ein Malomat ein 4-Tupel (Q, Γ, δ, q_0), wobei

1. $Q \neq \emptyset$ die endliche Zustandsmenge,
2. $\Gamma \neq \emptyset$ die endliche Farbpalette,
3. $\delta : Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{\uparrow, \rightarrow, \downarrow, \leftarrow, N\}$ die Übergangsfunktion und
4. $q_0 \in Q$ der Startzustand ist.

Analog zu deterministischen Turingmaschinen können Malomaten auch graphisch als gelabelte Graphen dargestellt werden (siehe Beispiel unten).
Ein Malomat erhält als Eingabe eine voreingefärbte Leinwand. Diese lässt sich durch eine Funktion $f : \mathbb{Z}^2 \to \Gamma$ darstellen. Eine Konfiguration eines Malomats ist dann ein Tripel (q, p, f), wobei $q \in Q$ der aktuelle Zustand, $p \in \mathbb{Z}^2$ die aktuelle Position (des Kopfs/Pinsels) und $f : \mathbb{Z}^2 \to \Gamma$ die aktuelle Leinwand ist. Die Übergangsrelation $\to_M$ ist dann wie folgt definiert: Falls $\delta\big(q, f(x,y)\big) = (q', c, D)$, dann

$$\big(q, (x,y), f\big) \to_M \begin{cases} \big(q', (x, y+1), f'\big), & \text{falls } D = \uparrow \\ \big(q', (x+1, y), f'\big), & \text{falls } D = \rightarrow \\ \big(q', (x, y-1), f'\big), & \text{falls } D = \downarrow \\ \big(q', (x-1, y), f'\big), & \text{falls } D = \leftarrow \\ \big(q', (x, y), f'\big), & \text{falls } D = N \end{cases},$$

wobei

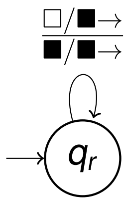
$$f'(x', y') \coloneqq \begin{cases} c, & \text{falls } x = x' \text{ und } y = y' \\ f(x', y'), & \text{sonst} \end{cases}.$$

Die Initialposition eines Malomats ist dabei stets der Ursprung $(0, 0) \in \mathbb{Z}^2$. Beachten Sie: Malomaten sind fleißige Maler – sie halten formal gesehen nämlich nie.

Betrachten Sie nun die Farbpalette $\Gamma \coloneqq \{\square, \blacksquare\}$ (weiß und schwarz) und die weiße Eingabeleinwand $f_w : \mathbb{Z}^2 \to \Gamma, (x, y) \mapsto \square$.
Wir sagen ein *Malomat M malt ein Gemälde* $G \subseteq \mathbb{Z}^2$ falls M mit Farbpalette Γ bei Eingabe f_w

1. jede beliebige, fixierte Position $(x, y) \in G$ nach endlich vielen Schritten schwarz einfärbt,
2. keine schwarz eingefärbte Position jemals weiß übermalt und
3. keine Position $(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \setminus G$ jemals schwarz einfärbt.

Beispiel: Der folgende Malomat malt das Gemälde $\mathbb{N} \times \{0\}$.



a)* Geben Sie einen Malomat *graphisch* an, der das Gemälde $G_1 \coloneqq \{(-n, n) \mid n \in \mathbb{N} \text{ und } n \text{ ist ungerade}\}$ malt. Ihr Malomat darf *maximal 5 Zustände* benutzen. Beschreiben Sie ihre Idee dabei auch informell aber vollständig! Die Korrektheit Ihrer Konstruktion müssen Sie nicht beweisen.

b)* Geben Sie einen Malomat *graphisch* an, der das Gemälde $G_2 \coloneqq \{(-i, i) \mid i \in \mathbb{Z}\}$ malt. Ihr Malomat darf *maximal 6 Zustände* benutzen. Beschreiben Sie ihre Idee dabei auch informell aber vollständig! Die Korrektheit Ihrer Konstruktion müssen Sie nicht beweisen.

Lösungsbox Aufgabe 8 a)

Lösungsbox Aufgabe 8 b)

Aufgabe 9 NP-Reduktion (7 Punkte)

Wir betrachten ein Entscheidungsproblem, in dem es darum geht, einen Studienplan zusammenzustellen. Dabei müssen n Fachbereiche (durchnummeriert als $1, \dots, n$) abgedeckt werden. Wir können aus m Fächern $(1, \dots, m)$ auswählen, wobei jedes Fach einer gewissen Teilmenge der Fachbereiche zugeordnet ist. Um dies darzustellen gibt es für jedes Fach i eine Menge $B_i \subseteq \{1, \dots, n\}$, die genau die Fachbereiche enthält, denen das Fach zugeordnet ist. Um einen validen Studienplan zu bilden, sollten wir für jeden Fachbereich mindestens ein Fach belegt haben, das diesem zugeordnet ist. Wir dürfen insgesamt maximal $k \leq m$ Fächer belegen.
Formal sieht das Problem also so aus:
Problem STUDIUM
Gegeben: $n, m \in \mathbb{N}$, Mengen $B_1, \dots, B_m$ mit $B_i \subseteq \{1, \dots, n\}$. Ein $k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq m$.
Zu entscheiden: Gibt es eine Teilmenge $F \subseteq \{1, \dots, m\}$ mit $|F| \leq k$, sodass $\forall x \in \{1, \dots, n\}. \exists y \in F. x \in B_y$.

0
1

a)* Zeigen Sie, dass STUDIUM $\in$ NP.

b)* Zeigen Sie, dass STUDIUM NP-schwer ist, indem Sie eine Reduktion von MENGENÜBERDECKUNG (Siehe Vorlesung Folie 400) angeben und deren Korrektheit formal beweisen.

0
1
2
3
4
5
6

Lösungsbox Aufgabe 9 (Teilaufgabe bitte klar kennzeichnen)

Lösungsbox Aufgabe 9 a)

Lösungsbox Aufgabe 9 b)

Lösungsbox Aufgabe 9 b) fortlaufend

Zusätzlicher Platz für Lösungen. Markieren Sie deutlich die Zuordnung zur jeweiligen Teilaufgabe. Vergessen Sie nicht, ungültige Lösungen zu streichen.

Zusätzlicher Platz für Lösungen. Markieren Sie deutlich die Zuordnung zur jeweiligen Teilaufgabe. Vergessen Sie nicht, ungültige Lösungen zu streichen.