Prof. Javier Esparza
Philipp Czerner, Martin Helfrich

Technische Universität München
Lehrstuhl für Theoretische Informatik

Einführung in die Theoretische Informatik

Sommersemester 2021 – Übungsblatt 11

- Das Übungsblatt ist in zwei Teile gegliedert: den Vorbereitungsteil, den Sie vor der Übung selbstständig bearbeiten sollen, und den Übungs-/Nachbereitungsteil, der Aufgaben enthält, die in der Übung besprochen werden und von Ihnen anschließend zur Nachbereitung verwendet werden können.
- Das ist nicht das Hausaufgabenblatt! Die Hausaufgaben finden Sie auf einem separaten Blatt.

Vorbereitung (→ vor der Übung selbständig zu bearbeiten)

Individualaufgabe Ü11.1. (*Wichtige Begriffe*)

Überprüfen Sie, dass Sie die folgenden Begriffe oder Notationen korrekt definieren können.

- Postsche Korrespondenzproblem (PCP)
- Reduktion
- berechenbar
- totale Funktion
- entscheidbar / unentscheidbar
- semi-entscheidbar (bzw. rekursiv aufzählbar)

Individualaufgabe Ü11.2. (*Kahoot*)

Falls Sie das Kahoot aus der Vorlesung verpasst haben: Spielen Sie es jetzt! Link[1]

Individualaufgabe Ü11.3. (H_{NEQ})

Sei Σ ein beliebiges Alphabet. Zeigen Sie: Es ist unentscheidbar zu prüfen, ob für zwei als Eingabe gegebene Turing-Maschinen die eine auf allen Eingaben genau dann hält, wenn die andere nicht hält. Formaler: Zeigen Sie, die Menge

$$\mathcal{H}_{NEQ} := \{w_1\#w_2 \mid w_1, w_2 \in \{0,1\}^* \text{ und } \forall x \in \Sigma^*.\ M_{w_1}[x]\downarrow \iff \neg M_{w_2}[x]\downarrow\}$$

ist unentscheidbar.

Lösungsskizze. Für diese Aufgabe gibt es eine Videolösung: Link

Wir reduzieren das Halteproblem auf leerem Band $\mathcal{H}_0$ auf $\mathcal{H}_{NEQ}$. Dabei gilt zu beachten, dass die Reduktion total, berechenbar und korrekt sein muss.

Reduktion von $\mathcal{H}_0$: Sei $w_\perp$ die Kodierung einer Turing-Maschine, die auf keiner Eingabe hält. Sei $w \in \{0,1\}^*$ beliebig. Wir berechnen zunächst die Kodierung w' einer Turing-Maschine, die bei jeder Eingabe das Band löscht und dann $M_w[\epsilon]$ ausführt. Anschließend

[1] Falls der Link nicht mehr funktioniert, teilen Sie dies bitte der Übungsleitung mit. Die Teilnehmeranzahl ist leider auf 2000 begrenzt.

geben wir $w'\#w_\perp$ zurück.

Die Reduktion ist total: Für jede Eingabe w wird die Ausgabe $w'\#w_\perp$ erzeugt.

Die Reduktion ist berechenbar: Die En- und Dekodierungsfunktionen für Turing-Maschinen sind berechenbar. Außerdem kann eine TM alle Zeichen auf dem Band, die nicht dem Leerzeichen entsprechen, durch geeignete Übergänge anfangs überschreiben.

Die Reduktion ist korrekt:

$$\begin{aligned} w \in \mathcal{H}_0 &\iff M_w[\epsilon]\downarrow && \text{(Def. } \mathcal{H}_0\text{)} \\ &\iff \forall x \in \Sigma^*.\ M_{w'}[x]\downarrow && (M_{w'} \text{ führt immer } M_w[\epsilon] \text{ aus}) \\ &\iff \forall x \in \Sigma^*.(M_{w'}[x]\downarrow \text{ und } \neg M_{w_\perp}[x]\downarrow) && (M_{w_\perp} \text{ hält nie}) \\ &\iff w'\#w_\perp \in \mathcal{H}_{NEQ} && \text{(Def. } \mathcal{H}_{NEQ}\text{)} \end{aligned}$$

□

Übung und Nachbereitung

Fokusaufgabe Ü11.4. (*Unentscheidbare Typ-2 Probleme*)

In der Vorlesung haben wir folgende Probleme für kontextfreie Grammatiken G_1, G_2 über einem Alphabet Σ kennengelernt:

$\langle 1 \rangle$ Ist $L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$?

$\langle 2 \rangle$ Ist $|L(G_1) \cap L(G_2)| < \infty$?

$\langle 3 \rangle$ Ist $L(G_1) \cap L(G_2)$ kontextfrei?

$\langle 4 \rangle$ Ist $L(G_1) \subseteq L(G_2)$?

$\langle 5 \rangle$ Ist $L(G_1) = L(G_2)$?

Von $\langle 1 \rangle$ wurde in der Vorlesung gezeigt, dass es unentscheidbar ist. In der Übung und den Hausaufgaben dieser Woche wollen wir auch die anderen Probleme behandeln. Zeigen Sie:

(a) $\langle 1 \rangle \leq \langle 2 \rangle$

(b) $\langle 1 \rangle \leq \langle 3 \rangle$

Hinweise: Zur Vereinfachung dürfen Sie $\Sigma = \{a, b\}$ jeweils für das zu reduzierenden Problem annehmen (ohne das Problem, auf das Sie reduzieren, einzuschränken).

Übungsaufgabe Ü11.5. (*Überblick: Entscheidbarkeit*)

Vervollständigen Sie das folgende Diagramm.

(a) Fügen Sie die Begriffe „entscheidbar“, „unentscheidbar“, „semi-entscheidbar“, „rekursiv aufzählbar“, „co-semi-entscheidbar“[2] und „nulli-entscheidbar“[3] sinnvoll zum Diagramm hinzu.

(b) Sei $\mathcal{V}_f = \{w \mid \varphi_w = f\}$ für eine totale berechenbare Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.
Ordnen Sie diese Beispiel-Probleme richtig zu: $\{x \in \mathbb{N} \mid x = f(1)\}$, $\mathcal{H}$, $\overline{\mathcal{H}}$, $\mathcal{H}_0$, $\overline{\mathcal{H}_0}$, $\mathcal{H}_{\Sigma^*}$, $\overline{\mathcal{H}_{\Sigma^*}}$, $\mathcal{K}$, $\overline{\mathcal{K}}$, $\mathcal{H}_{NEQ}$, $\overline{\mathcal{H}_{NEQ}}$, PCP, $\overline{\text{PCP}}$, CFG Äquivalenz, $\mathcal{V}_f$, $\overline{\mathcal{V}_f}$ und „alle Sprachen $L \in P$“

[2]Eine Sprache L ist *co-semi-entscheidbar*, wenn es eine TM gibt, die 0 ausgibt wenn die Eingabe nicht in L ist und nicht terminiert wenn die Eingabe in L ist.

[3]Problem ist *nulli-entscheidbar*, wenn es nicht semi-entscheidbar ist und nicht co-semientscheidbar Problem ist.

Wenn $x \notin A$ / Wenn $x \in A$	terminiert (0)	terminiert nicht ($\perp$)
terminiert (1)	Beispiele:	Beispiele:
terminiert nicht ($\perp$)	Beispiele:	Beispiele:

Lösungsskizze. Ausgefüllte Tabelle:

Wenn $x \notin A$ / Wenn $x \in A$	terminiert (0)	terminiert nicht ($\perp$)
terminiert (1)	Beispiele: $\{x \in \mathbb{N} \mid x = f(1)\}$, alle Sprachen $L \in P$ **entscheidbar**	Beispiele: $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$, $\overline{\mathcal{V}_f}$ PCP **semi-entscheidbar rekursiv-aufzählbar**
terminiert nicht ($\perp$)	**co-semi-entscheidbar** **unentscheidbar** Beispiele: $\overline{\mathcal{H}_0}$, $\overline{\mathcal{H}}$, $\overline{\mathcal{K}}$, $\mathcal{V}_f$, $\overline{\text{PCP}}$, CFG Äquivalenz	***„nulli-entscheidbar"*** Beispiele: $\mathcal{H}_{\Sigma^*}$, $\overline{\mathcal{H}_{\Sigma^*}}$, $\mathcal{H}_{NEQ}$, $\overline{\mathcal{H}_{NEQ}}$

Übungsaufgabe Ü11.6. (*Reductio ad absurdum*)

Sei $A := \{w \in \Sigma^* \mid \exists i \in \mathbb{N}_0.\ |w| = 5i + 3\}$ mit $\Sigma = \{a, b\}$. Erklären Sie, warum die angegebenen Funktionen keine Reduktionen gemäß Vorlesungsdefinition sind.

(a) Behauptung: $\mathcal{H}_0 \leq A$

Reduktion: Definiere $f : \mathcal{H}_0 \to A$ mit $f(w) := aaa$.

(b) Behauptung: $\mathcal{H}_0 \leq A$

Reduktion:

$$f(w) = \begin{cases} aaa & \text{falls } w \in \mathcal{H}_0 \\ b & \text{sonst} \end{cases}$$

(c) Behauptung: $A \leq \mathcal{H}_0$

Reduktion: f bildet jedes Element $x \in \Sigma^*$ auf die Kodierung einer TM M_x ab, die wie folgt definiert ist: Die TM M_x löscht die Eingabe und schreibt x aufs Band, bestimmt dann die Länge von x, zieht 3 ab und prüft anschließend, ob das Ergebnis durch 5 teilbar ist. Dementsprechend gibt die Maschine „Ja“(1) oder „Nein“(0) aus.

(d) Behauptung: $\overline{\mathcal{H}_0} \leq \mathcal{H}_0$

Reduktion: f bildet jedes $w \in \{0,1\}^*$ auf die Kodierung $f(w)$ einer TM $M_{f(w)}$ ab, die $M_w[\epsilon]$ simuliert. Falls $M_w[\epsilon]$ hält, geht $M_{f(w)}$ in eine Endlosschleife. Falls $M_w[\epsilon]$ nicht hält, hält $M_{f(w)}$.

(e) Behauptung: $\mathcal{H}_{\Sigma^*} \leq \mathcal{H}_0$ mit $\mathcal{H}_{\Sigma^*} := \{w \in \{0,1\}^* \mid \forall x \in \Sigma^*.\ M_w[x]\downarrow\}$.

Reduktion: f bildet jedes $w \in \{0,1\}^*$ auf die Kodierung $f(w)$ einer TM $M_{f(w)}$ ab, die erst die Eingabe löscht, dann nichtdeterministisch $x \in \Sigma^*$ erzeugt und dann $M_w[x]$ simuliert.

Lösungsskizze.

(a) f ist undefiniert auf $\{0,1\}^* \setminus \mathcal{H}_0 \neq \emptyset$ und somit nicht total.

(b) f ist unberechenbar, da $\mathcal{H}_0$ unentscheidbar ist und somit $\chi_{\mathcal{H}_0}$ unberechenbar ist.

(c) f bildet auf Kodierungen von Turing-Maschinen ab, die immer terminieren. Da $a \notin A$, aber $f(a) \in \mathcal{H}_0$, erfüllt die Funktion f nicht die Definition einer Reduktion.

Außerdem ist die Notation M_x ungünstig, da wir einen Index einer TM in der Regel verwenden, um anzuzeigen, dass M_w die TM ist, die von w encodiert wird. In dieser Reduktion hat M_x aber eine andere Bedeutung.

(d) f ist nicht wohldefiniert. Wenn $M_{f(w)}$ die Berechnung von $M_w[\epsilon]$ simuliert und $M_w[\epsilon]$ nicht hält, dann hält definitiv $M_{f(w)}$ auch nicht.

(e) Sei w die Kodierung einer TM mit $M_w[\epsilon]\downarrow$ und $M_w[0]\uparrow$. Dann gilt $w \notin \mathcal{H}_{\Sigma^*}$ und $f(w) \in \mathcal{H}_0$.