Prof. Javier Esparza
Philipp Czerner, Martin Helfrich

Technische Universität München
Lehrstuhl für Theoretische Informatik

Einführung in die Theoretische Informatik

Sommersemester 2021 – Übungsblatt 10

- Das Übungsblatt ist in zwei Teile gegliedert: den Vorbereitungsteil, den Sie vor der Übung selbstständig bearbeiten sollen, und den Übungs-/Nachbereitungsteil, der Aufgaben enthält, die in der Übung besprochen werden und von Ihnen anschließend zur Nachbereitung verwendet werden können.
- Das ist nicht das Hausaufgabenblatt! Die Hausaufgaben finden Sie auf einem separaten Blatt.

Vorbereitung (→ vor der Übung selbständig zu bearbeiten)

Individualaufgabe Ü10.1. (*Wichtige Begriffe & Kahoot*)

Überprüfen Sie, dass Sie die folgenden Begriffe oder Notationen korrekt definieren können.

- abzählbar / überabzählbar
- berechenbar / unberechenbar
- rekursiv aufzählbar
- entscheidbar
- semi-entscheidbar
- Reduktion (Beispiel: $A \leq B$, sprich: *"A ist reduzierbar auf B"*)
- Satz von Rice
- terminierend

Falls Sie das Kahoot aus der Vorlesung verpasst haben: Spielen Sie es jetzt! Link[1]

Individualaufgabe Ü10.2. (*Entscheidbarkeit vs. Berechenbarkeit*)

Ordnen Sie die folgenden Satzanfänge den Satzenden so zu, dass richtige Aussagen entstehen. Sei dazu $A, B \subseteq \{0,1\}^*$:

(a) Die Funktion χ_A ist berechenbar,
(b) A ist entscheidbar,
(c) B ist nicht entscheidbar,

(i) wenn $A \leq B$ gilt und B entscheidbar ist.
(ii) wenn A entscheidbar ist.
(iii) wenn $A \leq B$ gilt und A nicht entscheidbar ist.

Lösungsskizze. (a) → (i)/(ii), (b) → (i)/(ii), (c) → (iii).

Individualaufgabe Ü10.3. (*Entscheidbarkeit*)

Überprüfen Sie, ob die folgenden Behauptungen korrekt oder inkorrekt sind. Begründen Sie dann Ihre Antworten wie folgt: Wenn L entscheidbar ist, beschreiben Sie einen Algorithmus, der die charakteristische Funktion χ_L berechnet. Wenn L unentscheidbar ist, leiten Sie einen Widerspruch zu einem Ergebnis der Vorlesung ab.

[1] Falls der Link nicht mehr funktioniert, teilen Sie dies bitte der Übungsleitung mit. Die Teilnehmeranzahl ist leider auf 2000 begrenzt.

(a) Wenn A und B entscheidbare Sprachen sind, dann ist $A \cap B$ entscheidbar.

(b) Wenn A und $A \cup B$ entscheidbar sind, dann ist B entscheidbar.

Lösungsskizze. Für diese Aufgabe gibt es eine Videolösung: Link

(a) Korrekt. Wenn A und B entscheidbar sind, dann sind die charakteristischen Funktionen χ_A und χ_B berechenbar. Wir definieren

$$\chi_{A\cap B} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } \chi_A = 1 \wedge \chi_B = 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Diese Funktion ist intuitiv berechenbar und eine charakteristische Funktion von $A \cap B$, da

$$\chi_{A\cap B}(w) = 1 \Leftrightarrow \chi_A(w) = 1 \wedge \chi_B(w) = 1 \Leftrightarrow w \in A \wedge w \in B \Leftrightarrow w \in A \cap B.$$

Folglich ist die Menge $A \cap B$ entscheidbar.

Alternativ mit Turingmaschinen:
Sei T_A DTM, die A entscheidet, T_B DTM, die B entscheidet. DTM zu $A \cap B$: Gegeben x, berechne $T_A[x]$. Falls $T_A[x]$ mit 0 auf dem Band hält, lehne x ab, ansonsten berechne $T_B[x]$. Hält $T_B[x]$ mit 0 auf dem Band, lehne x ab, sonst akzeptiere x. Da T_A, T_B die jeweiligen Mengen entscheiden, terminieren beide DTM, womit auch die DTM zu $A \cap B$ stets mit dem korrekten Ergebnis terminiert. Damit ist $A \cap B$ entscheidbar.

(b) Inkorrekt. Sei $B = \mathcal{H}_0 = \{w \in \{0,1\}^* \mid M_w[\epsilon]\downarrow\} \subsetneq \{0,1\}^*$ das Halteproblem auf leerem Band und $A = \{0,1\}^*$. Dann sind A und $A \cup B = \{0,1\}^*$ entscheidbar, aber B nicht.

Übung und Nachbereitung

Fokusaufgabe Ü10.4. (*Reduktion*)

Erinnerung: $\mathcal{H} := \{w\#x : w, x \in \{0,1\}^*, M_w[x]\downarrow\}$ (*Allgemeines Halteproblem*) und $\mathcal{H}_0 := \{w \in \{0,1\}^* \mid M_w[\epsilon]\downarrow\}$ (*Halteproblem auf leerem Band*)

(a) Sei $\mathcal{H}_{uvu} := \{w\#u\#v : w, u, v \in \{0,1\}^*, M_w[uvu]\downarrow\}$.
Zeigen Sie: $\mathcal{H}_{uvu}$ ist unentscheidbar, da $\mathcal{H} \leq \mathcal{H}_{uvu}$.

(b) Sei $\mathcal{H}_{\Sigma^*} := \{w \in \{0,1\}^* \mid \forall x \in \Sigma^* : \ M_w[x]\downarrow\}$.
Zeigen Sie: $\mathcal{H}_{\Sigma^*}$ ist unentscheidbar, da $\mathcal{H}_0 \leq \mathcal{H}_{\Sigma^*}$.

Übungsaufgabe Ü10.5. (*Allgemeine Reduktion*)

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen korrekt oder inkorrekt sind, und begründen Sie Ihre Antwort, indem Sie einen Beweis bzw. ein passendes Gegenbeispiel angeben. Sei $\Sigma := \{0,1\}$.

(a) $\forall A \subseteq \Sigma^* : A \leq \Sigma^*$

(b) $\forall A, B \subseteq \Sigma^* : A \leq B \quad \Longleftrightarrow \quad \overline{A} \leq \overline{B}$

(c) $\forall A, B, C \subseteq \Sigma^* : A \leq B \wedge B \leq C \implies A \leq C$

Lösungsskizze.

(a) Falsch. Sei $A = \emptyset$. Damit $\overline{A} = \Sigma^*$. Dann muss für eine Reduktionsfunktion f gelten: $\forall x \in \overline{A}.\ f(x) \notin \Sigma^*$. Eine solche Funktion f existiert aber nicht.

(b) Wahr. Gelte $A \leq B$. Dann existiert ein totales und berechenbares f mit: $\forall x \in \Sigma^*.\ x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B$. Somit gilt auch: $\forall x \in \Sigma^*.\ x \in \overline{A} \Leftrightarrow f(x) \in \overline{B}$. Daraus folgt dann $\overline{A} \leq \overline{B}$. Die Rückrichtung geht analog.

(c) Wahr. Seien f und g Reduktionen von $A \leq B$ und $B \leq C$. Sei nun $h(x) = g(f(x))$. h ist total und berechenbar, da f und g total und berechenbar sind. Sei $x \in A$ beliebig. Dann gilt $f(x) \in B$ und $h(x) = g(f(x)) \in C$. Sei nun $x \notin A$ beliebig. Dann gilt $f(x) \notin B$ und damit $h(x) = g(f(x)) \notin C$. Somit ist h eine geeignete Reduktion.

Übungsaufgabe Ü10.6. (*Satz von Rice*)

Sei Σ ein beliebiges Alphabet. Entscheiden Sie, ob die folgenden Mengen unentscheidbar sind und begründen Sie Ihre Antworten mit dem Satz von Rice (falls anwendbar). Geben Sie dabei die Menge $\mathcal{F}$ genau an und argumentieren Sie, warum die Menge nicht trivial ist (d.h. weder alle berechenbare Funktionen enthält noch leer ist).

(a) $L_1 = \{w \in \{0,1\}^* \mid \{u \in \Sigma^* \mid \varphi_w(u) = 1\} \text{ ist regulär}\}$

(b) $L_2 = \{w \in \{0,1\}^* \mid \forall n \in \mathbb{N}_0 :\ \varphi_w(n) = n \cdot (n+23) + 42\}$

(c) $L_3 = \{w \in \{0,1\}^* \mid \forall x \in \Sigma^* :\ \varphi_w(x) \neq |w|\}$

(d) $L_4 = \{w \in \{0,1\}^* \mid \forall p \in \mathbb{N}_0.\ (|w| > p \wedge p \text{ ist prim}) \implies w_p = 0\}$

Bei (d) bezeichnet $w_p \in \Sigma$ den Buchstaben an der p-ten Stelle im Wort w .

Lösungsskizze.

(a) Sei $\mathcal{F} = \{f \mid f \text{ ist berechenbar } \wedge f^{-1}(1) \text{ ist regulär}\}$. Sei nun g, h mit $g(w) := 1$ und

$$h(w) := \begin{cases} 1 & \text{falls } \exists i \geq 0.\ w = 0^i 1^i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

zwei berechenbare Funktionen. Dann gilt $g \in \mathcal{F}$ und $h \notin \mathcal{F}$. Somit ist $\mathcal{F}$ nicht die Menge aller berechenbarer Funktionen. Damit folgt aus dem Satz von Rice, dass L_1 unentscheidbar ist.

(b) Sei $\mathcal{F} = \{f \mid f \text{ ist berechenbar } \wedge \forall n \in \mathbb{N}_0 :\ f(n) = n \cdot (n+23) + 42\}$. Dann gilt für die konstante Nullfunktion g, dass $g \notin \mathcal{F}$. Somit ist $\mathcal{F}$ nicht die Menge aller berechenbarer Funktionen. Weiterhin ist $\mathcal{F}$ auch nicht leer, da das Polynom in der Definition berechenbar ist. Somit ist nach Satz von Rice L_2 unentscheidbar.

(c) Die Menge ist unentscheidbar, jedoch ist der Satz von Rice nicht anwendbar. Für den Satz von Rice müsste es eine nicht-triviale Menge $\mathcal{F}$ an berechenbaren Funktionen geben, sodass $L_3 = \{w \in \{0,1\}^* \mid \varphi \in \mathcal{F}\}$. Das Problem ist nun, das zwei Turingmaschinenkodierungen verschiedener Längen existieren können, sodass die Maschinen dieselbe Funktion berechnen, die eine Kodierung die Bedingung erfüllt, die andere jedoch nicht. Formaler:

Je nach Kodierungsfunktion können $v, w \in \{0,1\}^*$ mit $|v| \neq |w|$ existieren, sodass $\varphi = \varphi$, $\varphi(x) = |w|$ für ein $x \in \Sigma^*$ und $\varphi(x) \neq |v|$ für alle $x \in \Sigma^*$. Somit ist weder $\varphi(= \phi_v) \in \mathcal{F}$ noch $\varphi(= \phi_w) \notin \mathcal{F}$ und somit ist $\mathcal{F}$ nicht definierbar.

Der Beweis für die Unentscheidbarkeit kann durch Reduktion von $\overline{\mathcal{H}_0}$ erfolgen. Idee (muss nicht besprochen werden): Länge der TM ($|w|$) auf zweitem Band speichern; Eingabe löschen; TM $M_w[\epsilon]$ simulieren; erstes Band löschen; $|w|$ ausgeben

(d) L_4 ist entscheidbar. Eine TM kann alle Primzahlen kleiner $|w|$ berechnen und an diesen Stellen in w prüfen, ob $w_p = 0$ gilt.