

Einführung in die Theoretische Informatik

Sommersemester 2021 – Übungsblatt 10

- Das Übungsblatt ist in zwei Teile gegliedert: den Vorbereitungsteil, den Sie vor der Übung selbstständig bearbeiten sollen, und den Übungs-/Nachbereitungsteil, der Aufgaben enthält, die in der Übung besprochen werden und von Ihnen anschließend zur Nachbereitung verwendet werden können.
- Das ist nicht das Hausaufgabenblatt! Die Hausaufgaben finden Sie auf einem separaten Blatt.

Vorbereitung (→ vor der Übung selbstständig zu bearbeiten)

Individualaufgabe Ü10.1. (Wichtige Begriffe & Kahoot)

Überprüfen Sie, dass Sie die folgenden Begriffe oder Notationen korrekt definieren können.

- abzählbar / überabzählbar
- berechenbar / unberechenbar
- rekursiv aufzählbar
- entscheidbar
- semi-entscheidbar
- Reduktion (Beispiel: $A \leq B$, sprich: " A ist reduzierbar auf B ")
- Satz von Rice
- terminierend

Falls Sie das Kahoot aus der Vorlesung verpasst haben: Spielen Sie es jetzt! [Link](#)¹

Individualaufgabe Ü10.2. (Entscheidbarkeit vs. Berechenbarkeit)

Ordnen Sie die folgenden Satzanfänge den Satzenden so zu, dass richtige Aussagen entstehen. Sei dazu $A, B \subseteq \{0, 1\}^*$:

- | | |
|--|--|
| (a) Die Funktion χ_A ist berechenbar, | (i) wenn $A \leq B$ gilt und B entscheidbar ist. |
| (b) A ist entscheidbar, | (ii) wenn A entscheidbar ist. |
| (c) B ist nicht entscheidbar, | (iii) wenn $A \leq B$ gilt und A nicht entscheidbar ist. |

Lösungsskizze. (a) → (i)/(ii), (b) → (i)/(ii), (c) → (iii).

Individualaufgabe Ü10.3. (Entscheidbarkeit)

Überprüfen Sie, ob die folgenden Behauptungen korrekt oder inkorrekt sind. Begründen Sie dann Ihre Antworten wie folgt: Wenn L entscheidbar ist, beschreiben Sie einen Algorithmus, der die charakteristische Funktion χ_L berechnet. Wenn L unentscheidbar ist, leiten Sie einen Widerspruch zu einem Ergebnis der Vorlesung ab.

¹Falls der Link nicht mehr funktioniert, teilen Sie dies bitte der Übungsleitung mit. Die Teilnehmeranzahl ist leider auf 2000 begrenzt.

- (a) Wenn A und B entscheidbare Sprachen sind, dann ist $A \cap B$ entscheidbar.
- (b) Wenn A und $A \cup B$ entscheidbar sind, dann ist B entscheidbar.

Lösungsskizze. Für diese Aufgabe gibt es eine Videolösung: [Link](#)

- (a) Korrekt. Wenn A und B entscheidbar sind, dann sind die charakteristischen Funktionen χ_A und χ_B berechenbar. Wir definieren

$$\chi_{A \cap B} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } \chi_A = 1 \wedge \chi_B = 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Diese Funktion ist intuitiv berechenbar und eine charakteristische Funktion von $A \cap B$, da

$$\chi_{A \cap B}(w) = 1 \Leftrightarrow \chi_A(w) = 1 \wedge \chi_B(w) = 1 \Leftrightarrow w \in A \wedge w \in B \Leftrightarrow w \in A \cap B.$$

Folglich ist die Menge $A \cap B$ entscheidbar.

Alternativ mit Turingmaschinen:

Sei T_A DTM, die A entscheidet, T_B DTM, die B entscheidet. DTM zu $A \cap B$: Gegeben x , berechne $T_A[x]$. Falls $T_A[x]$ mit 0 auf dem Band hält, lehne x ab, ansonsten berechne $T_B[x]$. Hält $T_B[x]$ mit 0 auf dem Band, lehne x ab, sonst akzeptiere x . Da T_A, T_B die jeweiligen Mengen entscheiden, terminieren beide DTM, womit auch die DTM zu $A \cap B$ stets mit dem korrekten Ergebnis terminiert. Damit ist $A \cap B$ entscheidbar.

- (b) Inkorrekt. Sei $B = \mathcal{H}_0 = \{w \in \{0, 1\}^* \mid M_w[\epsilon] \downarrow\} \subsetneq \{0, 1\}^*$ das Halteproblem auf leerem Band und $A = \{0, 1\}^*$. Dann sind A und $A \cup B = \{0, 1\}^*$ entscheidbar, aber B nicht.

Übung und Nachbereitung

Fokusaufgabe Ü10.4. (Reduktion)

Erinnerung: $\mathcal{H} := \{w \# x : w, x \in \{0, 1\}^*, M_w[x] \downarrow\}$ (Allgemeines Halteproblem) und $\mathcal{H}_0 := \{w \in \{0, 1\}^* \mid M_w[\epsilon] \downarrow\}$ (Halteproblem auf leerem Band)

- (a) Sei $\mathcal{H}_{uvu} := \{w \# u \# v : w, u, v \in \{0, 1\}^*, M_w[uvu] \downarrow\}$.
Zeigen Sie: \mathcal{H}_{uvu} ist unentscheidbar, da $\mathcal{H} \leq \mathcal{H}_{uvu}$.
- (b) Sei $\mathcal{H}_{\Sigma^*} := \{w \in \{0, 1\}^* \mid \forall x \in \Sigma^* : M_w[x] \downarrow\}$.
Zeigen Sie: \mathcal{H}_{Σ^*} ist unentscheidbar, da $\mathcal{H}_0 \leq \mathcal{H}_{\Sigma^*}$.

Übungsaufgabe Ü10.5. (Allgemeine Reduktion)

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen korrekt oder inkorrekt sind, und begründen Sie Ihre Antwort, indem Sie einen Beweis bzw. ein passendes Gegenbeispiel angeben. Sei $\Sigma := \{0, 1\}$.

- (a) $\forall A \subseteq \Sigma^* : A \leq \Sigma^*$
- (b) $\forall A, B \subseteq \Sigma^* : A \leq B \iff \bar{A} \leq \bar{B}$
- (c) $\forall A, B, C \subseteq \Sigma^* : A \leq B \wedge B \leq C \implies A \leq C$

Übungsaufgabe Ü10.6. (*Satz von Rice*)

Sei Σ ein beliebiges Alphabet. Entscheiden Sie, ob die folgenden Mengen unentscheidbar sind und begründen Sie Ihre Antworten mit dem Satz von Rice (falls anwendbar). Geben Sie dabei die Menge \mathcal{F} genau an und argumentieren Sie, warum die Menge nicht trivial ist (d.h. weder alle berechenbare Funktionen enthält noch leer ist).

(a) $L_1 = \{w \in \{0, 1\}^* \mid \{u \in \Sigma^* \mid \varphi_w(u) = 1\} \text{ ist regulär}\}$

(b) $L_2 = \{w \in \{0, 1\}^* \mid \forall n \in \mathbb{N}_0 : \varphi_w(n) = n \cdot (n + 23) + 42\}$

(c) $L_3 = \{w \in \{0, 1\}^* \mid \forall x \in \Sigma^* : \varphi_w(x) \neq |w|\}$

(d) $L_4 = \{w \in \{0, 1\}^* \mid \forall p \in \mathbb{N}_0. (|w| > p \wedge p \text{ ist prim}) \implies w_p = 0\}$

Bei (d) bezeichnet $w_p \in \Sigma$ den Buchstaben an der p -ten Stelle im Wort w .