Prof. Javier Esparza
Philipp Czerner, Martin Helfrich

Technische Universität München
Lehrstuhl für Theoretische Informatik

Einführung in die Theoretische Informatik

Sommersemester 2021 – Übungsblatt 8

- Das Übungsblatt ist in zwei Teile gegliedert: den Vorbereitungsteil, den Sie vor der Übung selbstständig bearbeiten sollen, und den Übungs-/Nachbereitungsteil, der Aufgaben enthält, die in der Übung besprochen werden und von Ihnen anschließend zur Nachbereitung verwendet werden können.
- Das ist nicht das Hausaufgabenblatt! Die Hausaufgaben finden Sie auf einem separaten Blatt.

Notation von PDA-Regeln 2: Auf Übungsblatt 7 wurde eine graphische Notation für PDAs eingeführt. Für einige häufige Fälle führen wir nun weitere Kurzschreibweisen ein. Sei $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \delta, F)$ ein PDA mit $\Gamma = \{X_1, X_2, ..., X_k\}$ und $a \in \Sigma \cup \{\epsilon\}$. Wir schreiben

- $a, \Gamma/\varepsilon$ statt $a, X_1/\varepsilon, ..., a, X_k/\varepsilon$,
- $a, \Gamma/\alpha\Gamma$ statt $a, X_1/\alpha X_1, ..., a, X_k/\alpha X_k$, mit $\alpha \in \Gamma^*$, und
- a statt $a, \Gamma/\Gamma$.

Vorbereitung (→ vor der Übung selbständig zu bearbeiten)

Individualaufgabe Ü8.1. (*Wichtige Begriffe*)

Überprüfen Sie, dass Sie die folgenden Begriffe oder Notationen korrekt definieren können.

- deterministischer Kellerautomat (DPDA)
- deterministische kontextfreie Sprache (DCFL)
- Abschlusseigenschaften von DCFL
- Abschlusseigenschaften von CFL
- Konversion CFG ↔ PDA

Individualaufgabe Ü8.2. (*Kahoot*)

Falls Sie das Kahoot aus der Vorlesung verpasst haben: Spielen Sie es jetzt! Link[1]

Individualaufgabe Ü8.3. (*Automata Tutor: "DPDAs"*)

Lösen Sie die Aufgaben Ü8.3 (a–b) auf Automata Tutor.[2] **Achtung:** Für die Übungsaufgaben haben Sie beliebig viele Versuche. Für die Aufgaben in Hausaufgabenblatt 8 nicht! Ihr konstruierter Automat darf nicht zu viele Zustände haben (siehe Aufgabenstellung). Wenn Sie einen ε-Übergang angeben wollen, geben Sie statt ε bitte `E` ein (siehe

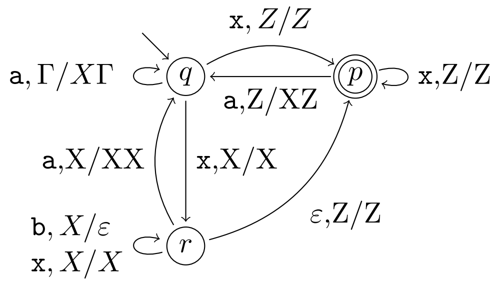
[1] Falls der Link nicht mehr funktioniert, teilen Sie dies bitte der Übungsleitung mit. Die Teilnehmeranzahl ist leider auf 2000 begrenzt.

[2] Wenn Sie Automata Tutor noch nicht verwendet haben, folgen Sie erst den Schritten in Ü1.2, um sich richtig zu registrieren.

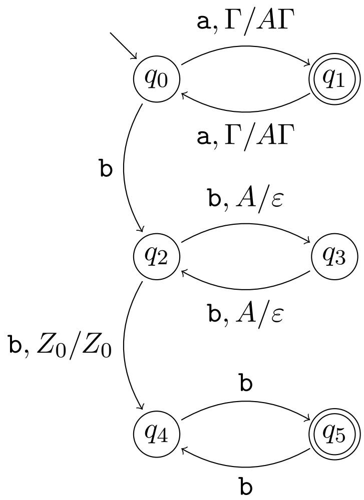
Hinweisbox über Canvas) und beim Entfernen eines Kellersymbols, lassen Sie den Teil hinter "/" bitte leer (Beispiel: "$\mathtt{a}, X/$"). Wir haben diese Woche die Simulation aktiviert. Nutzen Sie die Simulation, um Ihren Automaten zu testen.

Lösungsskizze.

(a) Zu der Aufgabe gibt es ein Lösungsvideo. Mögliche Lösung:



(b) Mögliche Lösung:



Übung und Nachbereitung

Fokusaufgabe Ü8.4. (*CFG* $\leftrightarrow$ *PDA*)

Wie Sie in der Vorlesung gesehen haben (Folie 198ff), können kontextfreie Grammatiken und Pushdown-Automaten sich gegenseitig simulieren. Wir üben nun diese Übersetzungen zwischen CFG und PDA.

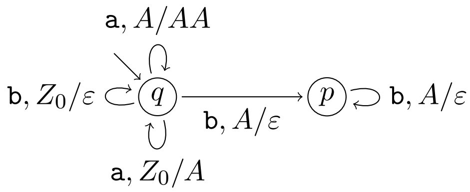
(a) Überführen Sie die folgende CFG $G = (\{S\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mithilfe von Satz 4.54 in einen PDA M mit $L_\varepsilon(M) = L(G)$:

$$S \to SS \mid aSb \mid bSa \mid c$$

(b) Übersetzen Sie den folgenden PDA $M = (\{q, p\}, \{a, b\}, \{Z_0, A, B\}, q, Z_0, \delta)$ in eine

CFG G mit $L_\varepsilon(M) = L(G)$, wobei δ definiert ist durch:

$$\delta(q,a,A) = \{(q,AA)\} \qquad \delta(q,b,A) = \{(p,\epsilon)\} \qquad \delta(p,b,A) = \{(p,\epsilon)\}$$
$$\delta(q,a,Z_0) = \{(q,A)\} \qquad \delta(q,b,Z_0) = \{(q,\epsilon)\}$$



Übungsaufgabe Ü8.5. (*Zählerautomaten*)

Wir beschränken in dieser Aufgabe das Kelleralphabet von PDAs auf nur ein einziges Symbol und untersuchen die Ausdrucksmächtigkeit dieser Automaten etwas genauer.

(a) Geben Sie eine äquivalente Formulierung als Automaten, die statt des Kellers einen Zähler verwenden, an.

(b) Geben Sie einen solchen Automaten an, der eine nicht reguläre Sprache akzeptiert.

(c) Nun betrachten wir eine Variante, die zusätzlich noch ein Kellersymbol erlaubt, um den Anfang des Kellers zu markieren. Geben Sie wieder eine Charakterisierung mit Zählern an und einen Automaten, der eine kontextfreie Sprache akzeptiert, die von keinem Automaten im vorherigen Modell akzeptiert wird.

(d) Geben Sie eine kontextfreie Sprache an, die von keiner der betrachteten Automatenklassen akzeptiert wird.

Knobelaufgaben: Die folgenden Aufgaben können alle unabhängig voneinander gelöst werden:

(a) Geben Sie einen solchen Automaten an, der die Sprache $\overline{L}$ für $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid w = w^R\}$ akzeptiert.

(b) Nun betrachten wir deterministische Varianten dieser Automaten. Zeigen Sie zunächst, dass die Klasse dieser deterministischen Automaten unter dem Sprachkomplement abgeschlossen ist.

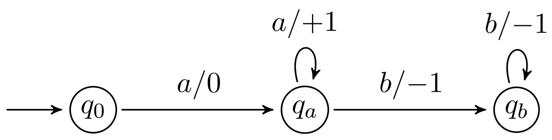
(c) Zeigen Sie, dass kein deterministischer Zählerautomat die Sprache L akzeptiert. *Hinweis:* Wie viele verschiedene Zustände kann ein Automat beim Lesen von Worten der Länge n erreichen?

(d) Zeigen Sie aus den vorherigen Aussagen, dass nichtdeterministische Automaten mit einem Zähler strikt mächtiger sind als deterministische Automaten mit beliebig vielen Zählern.

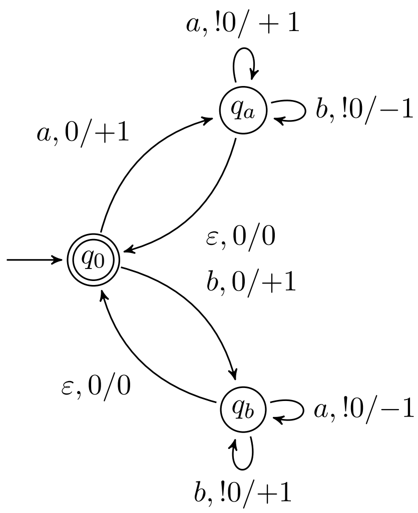
Lösungsskizze.

(a) Die Automaten sind ähnlich zu NFAs, aber besitzen einen Zähler der am Anfang auf eins steht. Beim Lesen eines Zeichens kann man sich entscheiden, den Zähler zu inkrementieren, zu dekrementieren, oder gleich zu lassen. Falls der Zähler 0 erreicht, bleibt der Automat stecken. Solche Automaten nennt man manchmal auch halbblinde Zählerautomaten. Wir werden im Folgenden ein Akzeptanzkriterium mit Zählerwert 0 verwenden.

(b) Der folgende Automat akzeptiert die Sprache $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$.



(c) In dieser Variante steht der Zähler am Anfang auf 0 und beim Lesen eines Zeichens kann der Zähler auf Gleichheit mit 0 überprüft werden. Akzeptiert wird mit Endzustand. Der folgende Automat akzeptiert die Sprache $\{w \mid |w|_a = |w|_b \wedge w \in \{a,b\}^*\}$.

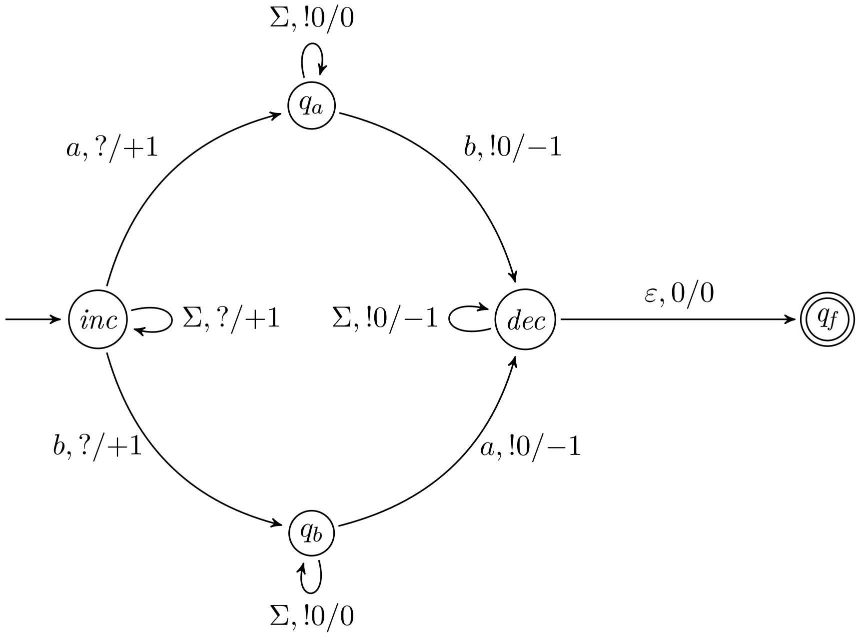


Hier bezeichnet 0 (bzw !0) an der zweiten Stelle einer Transition, dass der Zähler (nicht) gleich null ist. Es ist auch möglich diesen Automaten zu determinisieren.

(d) Beispiel: $\{ww^R : w \in \{a,b\}^*\}$

Knobelaufgaben:

(a) Idee: Wir raten eine Stelle k, an der der k-te Buchstabe nicht mit dem k-letzten Buchstaben übereinstimmt.



(b) Durch Vertauschen der Endzustände erhalten wir ein Komplementierungsverfahren für deterministische Zählerautomaten analog zu DFA's.

(c) Bei k Zählern können beim Lesen von Worten der Länge n maximal $\mathcal{O}(n^k)$ verschiedene Konfigurationen erreicht werden.

Beweis. Die Anzahl der Zustände im Automaten ist konstant. Nach n Schritten kann jeder Zähler nur einen Wert im Zahlenbereich von 0 bis n annehmen. Damit erhalten wir $|Q|(n+1)^k \in \mathcal{O}(n^k)$ mögliche Konfigurationen. □

Damit fallen alle Worte der Länge n in $\mathcal{O}(n^k)$ viele Äquivalenzklassen. Für die Sprache L befindet sich aber jedes Wort in einer eigenen Äquivalenzklasse. Damit fallen die Worte der Länge n in $\mathcal{O}(2^n)$ verschiedene Äquivalenzklassen. Also kann kein deterministischer Zählerautomat die Sprache L akzeptieren.

(d) Angenommen es gäbe einen deterministischen Zählerautomaten A, der $\overline{L}$ akzeptiert. Dann gäbe es auch einen deterministischen Zählerautomaten A', der L akzeptiert. Widerspruch. Da wir aber bereits einen nichtdeterministischen Automaten mit einem Zähler konstruiert haben, der $\overline{L}$ akzeptiert, ist diese Klasse strikt mächtiger.