

Einführung in die Theoretische Informatik

Sommersemester 2021 – Übungsblatt 7

- Das Übungsblatt ist in zwei Teile gegliedert: den Vorbereitungsteil, den Sie vor der Übung selbstständig bearbeiten sollen, und den Übungs-/Nachbereitungsteil, der Aufgaben enthält, die in der Übung besprochen werden und von Ihnen anschließend zur Nachbereitung verwendet werden können.
- Das ist nicht das Hausaufgabenblatt! Die Hausaufgaben finden Sie auf einem separaten Blatt.

Notation von PDA-Regeln: Anstatt der in den Folien verwendeten Schreibweise $(q, YZ) \in \delta(p, a, X)$ für die Ersetzungsregeln eines PDA kann man alternativ $pX \xrightarrow{a} qYZ$ schreiben wobei $p, q \in Q$, $X \in \Gamma$, $YZ \in \Gamma^*$, $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$.

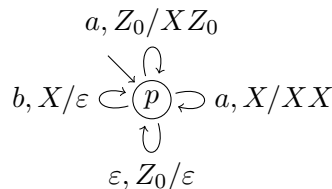
Beispiel: Den PDA mit δ :

$$\begin{aligned} \delta(p, a, Z_0) &= \{(p, XZ_0)\} & \delta(p, a, X) &= \{(p, XX)\} \\ \delta(p, b, X) &= \{(p, \varepsilon)\} & \delta(p, \varepsilon, Z_0) &= \{(p, \varepsilon)\} \end{aligned}$$

schreibt man alternativ:

$$pZ_0 \xrightarrow{a} pXZ_0 \quad pX \xrightarrow{a} pXX \quad pX \xrightarrow{b} p \quad pZ_0 \xrightarrow{\varepsilon} p$$

oder man stellt diesen als Graph mit Knotenmenge Q dar, wobei die Kante (p, q) dann mit " $a, X/YZ$ " beschriftet ist (siehe *Hopcroft et al., Introduction to Automata Theory, Kapitel 6*):



Vorbereitung (→ vor der Übung selbstständig zu bearbeiten)

Individualaufgabe Ü7.1. (Wichtige Begriffe)

Überprüfen Sie, dass Sie die folgenden Begriffe oder Notationen korrekt definieren können.

- nützlich, erzeugend, erreichbar (Symbole)
- CYK-Algorithmus
- Kellerautomat (PDA)
- Unterschied zwischen $L_\epsilon(A)$ und $L_F(A)$ für einen PDA A
- deterministischer Kellerautomat (DPDA)
- deterministische kontextfreie Sprache (DCFL)

Individualaufgabe Ü7.2. (Kahoot)

Falls Sie das Kahoot aus der Vorlesung verpasst haben: Spielen Sie es jetzt! [Link](#)¹

Individualaufgabe Ü7.3. (Automata Tutor: "CYK & PDAs")

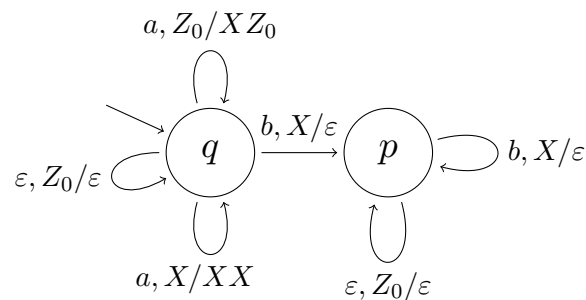
Lösen Sie die Aufgaben Ü7.3 (a-f) auf Automata Tutor.² **Achtung:** Für die Übungsaufgaben haben Sie beliebig viele Versuche. Für die Aufgaben in Hausaufgabe H7.1 nicht! Bei den *PDA construction* Aufgaben darf ihr konstruierter PDA nicht zu viele Zustände haben (siehe Aufgabenstellung). Wenn Sie einen ε -Übergang angeben wollen, geben Sie statt ε bitte **E** ein (siehe Hinweisbox über Canvas). Die Simulation bei PDAs ist deaktiviert. Bitte wundern Sie sich nicht, dass bei einem Klick auf **Start Simulation** nichts passiert. **Tipp:** Für den Aufgabentyp "CYK" können Sie sich zum Üben weitere Aufgaben von AT generieren lassen. Klicken Sie dafür auf **Home > My Autogenerated Problems** und wählen Sie den Aufgabentyp und gewünschten Schwierigkeitsgrad.

Individualaufgabe Ü7.4. (Mein erster PDA)

Zeichnen Sie einen PDA, der die Sprache $L = \{a^i b^i \mid i \geq 0\}$ erkennt.

Lösungsskizze. Idee: Für jedes a legen wir ein X auf den Stack und überprüfe dann, ob die die Anzahl von b s mit der Anzahl an X auf dem Stack übereinstimmt.

Ein PDA A der mit leerem Keller die Sprache L akzeptiert (also $L_c(A) = L$) ist:



Übung und Nachbereitung

Fokusaufgabe Ü7.5. (PDAs)

Geben Sie für die folgenden Sprachen jeweils einen Kellerautomaten A_i in einer der oben aufgeführten Darstellungsarten an, so dass $L_i = L(A_i)$. Der Automat soll mit *leerer Stack* akzeptieren. Geben Sie dann zusätzlich für jeden Automaten jeweils ein nicht-leeres Wort w mit akzeptierendem Lauf an.

- $L_1 = \{a^n b^{3n} \mid n \geq 0\}$
- $L_2 = \{a^n b^m \in \{a, b\}^* \mid n \leq m \leq 2n\}$
- $L_3 = \{w \in \{a, b\}^* \mid 2 \cdot |w|_a = 3 \cdot |w|_b\}$

¹Falls der Link nicht mehr funktioniert, teilen Sie dies bitte der Übungsleitung mit. Die Teilnehmeranzahl ist leider auf 2000 begrenzt.

²Wenn Sie Automata Tutor noch nicht verwendet haben, folgen Sie erst den Schritten in Ü1.2, um sich richtig zu registrieren.

Übungsaufgabe Ü7.6. (CFG bereinigen)

Die CFG G bestehe aus folgenden Produktionen über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow ASA \mid aB \\ A &\rightarrow B \mid S \mid CB \\ B &\rightarrow b \mid \varepsilon \\ C &\rightarrow aC \\ D &\rightarrow aSCb \mid a \end{aligned}$$

- Beschreiben Sie in eigenen Worten, wann ein Nichtterminal *nützlich* in einer Grammatik ist.
- Reduzieren Sie die Grammatik G auf die nützlichen Nichtterminale.

Übungsaufgabe Ü7.7. (CYK)

- Beschreiben Sie in eigenen Worten, wie die Indizes in einer CYK-Tabelle zu verstehen sind.
- Beschreiben Sie in eigenen Worten, wie man den Inhalt eines Feldes in der CYK-Tabelle berechnet.
- Wir betrachten die Grammatik $G = (\{S, T, U, A, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$ in CNF mit den folgenden Produktionen P :

$$\begin{array}{ll} S \rightarrow TS \mid CT \mid a & A \rightarrow a \\ T \rightarrow AU \mid TT \mid c & B \rightarrow b \\ U \rightarrow SB \mid AB & C \rightarrow c \end{array}$$

Bestimmen Sie mit dem CYK-Algorithmus, ob $ccaab \in L(G)$ und $aabcc \in L(G)$. Geben Sie dabei auch die berechneten Tabellen an.

Übungsaufgabe Ü7.8. (PDA Einschränkungen)

- Wir beschränken die Größe des Kelleralphabets Γ von PDAs und zeigen, dass jede kontextfreie Sprache von einem PDA mit $|\Gamma| = 2$ erkannt werden kann. Skizzieren Sie hierzu eine allgemeine Übersetzung von einem PDA mit $|\Gamma| > 2$ zu einem PDA mit $|\Gamma'| = 2$, so dass beide Automaten die gleiche Sprache erkennen.
- Wir beschränken die Kellerhöhe von PDAs auf maximal k Kellerzeichen und nennen diese PDAs *k-bounded-Stack-PDA*. Insbesondere kann ein solcher PDA keine PUSH-Operationen ausführen sollten danach mehr als k Symbole auf dem Stack liegen. Zeigen Sie, dass k-bounded-Stack-PDA genau die regulären Sprachen erkennen, indem Sie eine allgemeine Übersetzung von PDAs zu ε -NFA angeben.