

## Einführung in die Theoretische Informatik

### Sommersemester 2021 – Übungsblatt 5

- Das Übungsblatt ist in zwei Teile gegliedert: den Vorbereitungsteil, den Sie vor der Übung selbstständig bearbeiten sollen, und den Übungs-/Nachbereitungsteil, der Aufgaben enthält, die in der Übung besprochen werden und von Ihnen anschließend zur Nachbereitung verwendet werden können.
- Das ist nicht das Hausaufgabenblatt! Die Hausaufgaben finden Sie auf einem separaten Blatt.

### Vorbereitung (→ vor der Übung selbständig zu bearbeiten)

#### Individualaufgabe Ü5.1. (*Wichtige Begriffe*)

Überprüfen Sie, dass Sie die folgenden Begriffe oder Notationen korrekt definieren können.

- Kontextfreie Sprache (*CFL*)
- rechts-lineare / links-lineare CFG
- Syntaxbaum
- Kontextfreie Grammatik (*CFG*)
- (Links-/Rechts-)Ableitung
- mehrdeutige CFG

#### Individualaufgabe Ü5.2. (*Automata Tutor: "Contextfree Languages"*)

Lösen Sie die Aufgaben Ü5.2 (a–d) auf Automata Tutor.<sup>1</sup> **Achtung:** Für die Übungsaufgaben haben Sie beliebig viele Versuche. Für die Aufgaben in Hausaufgabe H5.1 nicht!

#### Individualaufgabe Ü5.3. (*Anwendungsbeispiel kontextfreie Grammatiken*)

Betrachten Sie die folgende Grammatik  $G = (V, \Sigma, P, J)$  mit

$$V = \{J, D, T, N, N', Z, A, S, E, U, B, C, V, U', B'\}$$

$$\Sigma = \{;, \{, \}, (, ), =, a, b, \dots, y, z, 0, 1, \dots, 8, 9, +, -, \cdot, /, \%, !, <, >, \&\&, | | \}$$

---

<sup>1</sup>Wenn Sie Automata Tutor noch nicht verwendet haben, folgen Sie erst den Schritten in Ü1.2, um sich richtig zu registrieren.

mit den Produktionen  $P :=$

$$\begin{aligned}
 J &\rightarrow DS \mid S \\
 D &\rightarrow TN; D \mid TN; \\
 T &\rightarrow \text{int} \\
 N &\rightarrow AN' \\
 N' &\rightarrow AN' \mid ZN' \mid A \mid Z \\
 A &\rightarrow a \mid b \mid c \mid \dots \mid y \mid z \\
 Z &\rightarrow 0 \mid 1 \mid \dots \mid 8 \mid 9 \\
 S &\rightarrow SS \mid ; \mid \{S\} \mid N = E; \mid N = \text{read}(); \mid \text{write}(E); \mid \text{if}(C) S \text{ else } S \mid \text{while}(C) S \\
 E &\rightarrow Z \mid N \mid (E) \mid UE \mid EBE \\
 U &\rightarrow - \\
 B &\rightarrow - \mid + \mid \cdot \mid / \mid \% \\
 C &\rightarrow \text{true} \mid \text{false} \mid (C) \mid EVE \mid U'(C) \mid CB'C \\
 V &\rightarrow == \mid != \mid <= \mid < \mid >= \mid > \\
 U' &\rightarrow ! \\
 B' &\rightarrow \&\& \mid \mid \mid
 \end{aligned}$$

- Was für eine Sprache erzeugt diese Grammatik?
- Beurteilen Sie die folgende Aussagen: Alle Worte in  $L(G)$  können zu einem funktionierenden Programm kompiliert werden.
- Geben Sie ein gültiges Wort in der Sprache an, das alle Nichtterminale mindestens einmal verwendet.
- Zeichnen Sie den Syntaxbaum für das in Teilaufgabe (c) gefundene Wort.

## Übung und Nachbereitung

### Fokusaufgabe Ü5.4. (Sprache einer kontextfreien Grammatik)

Gegeben sei die folgende Grammatik  $G$ :

$$\begin{aligned}
 S &\rightarrow aSa \mid bSb \mid aTb \mid bTa \\
 T &\rightarrow aT \mid bT \mid \epsilon
 \end{aligned}$$

- Welche Sprache beschreibt  $G$ ? Geben Sie eine intensionale Mengendarstellung<sup>2</sup>  $L$  für  $L(G)$  an.
- Zeigen oder widerlegen Sie:  $L$  ist regulär.
- Zeigen Sie  $L(G) = L$  formal. Beweisen Sie dabei auch induktiv, welche Sprache von  $T$  erzeugt wird.

<sup>2</sup>Das heißt, eine Beschreibung der Form  $L := \{w \in A \mid P(a)\}$  für eine geeignete Menge  $A$  und Prädikat  $P$ .

### Übungsaufgabe Ü5.5. (Sprache einer kontextfreien Grammatik)

Sei  $G = (\{S, E, O, A, B, X\}, \{a, b\}, P, S)$  die CFG mit folgenden Produktionen  $P$ :

$$\begin{aligned} S &\rightarrow E \mid O \\ E &\rightarrow AB \mid BA \\ A &\rightarrow XAX \mid a \\ B &\rightarrow XBX \mid b \\ O &\rightarrow XXO \mid X \\ X &\rightarrow a \mid b \end{aligned}$$

- (a) Geben Sie für jedes der folgenden Wörter jeweils eine Linksableitung und eine Rechtsableitung zzgl. des entsprechenden Syntaxbaums an:  
(i)  $abaaaa$  (ii)  $babab$  (iii)  $aabbaaba$
- (b) Entscheiden Sie, ob die Grammatik  $G$  mehrdeutig ist oder nicht. Wenn sie mehrdeutig ist, geben Sie ein Wort  $w \in L(G)$  mit zwei Syntaxbäumen an. Sonst beweisen Sie, dass  $G$  nicht mehrdeutig ist.

### Übungsaufgabe Ü5.6. (Residualsprachen)

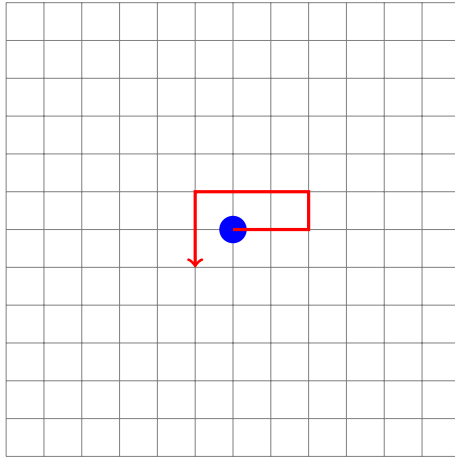
Die Äquivalenzklassen einer Sprache  $L$  kann man verwenden um z.B. direkt den minimalen DFA aufzustellen, oder um festzustellen, ob  $L$  regulär ist. Allerdings ist es teilweise mühsam, die Äquivalenzklassen herauszufinden: die Äquivalenzklasse von  $u$  enthält alle Wörter  $v$ , sodass die Suffixe  $w$ , die man an  $u$  anhängen muss, damit  $uw \in L$ , genau die sind, die man an  $v$  anhängen muss, damit  $vw \in L$ . Wir betrachten nun diese Suffixe direkt und zeigen, dass man auch auf diese Weise bereits den minimalen DFA aufstellen kann und entscheiden kann, ob eine Sprache regulär ist.

Sei  $\Sigma := \{a, b\}$  und  $L \subseteq \Sigma^*$  eine Sprache über  $\Sigma$ . Für ein Wort  $w \in \Sigma^*$  definieren wir die *Residualsprache*  $L^w := \{u : uw \in L\}$ . Die Residualsprache  $L^w$  enthält also genau die Wörter in  $L$ , die mit  $w$  beginnen, wobei das führende  $w$  entfernt wurde. Beispielsweise gilt  $L(ab^* \mid ba^*)^a = L(b^*)$  und  $L(ab^* \mid ba^*)^{aba} = \emptyset$ .

- (a) Zeigen Sie  $u \equiv_L v \Leftrightarrow L^u = L^v$  für beliebige Wörter  $u, v \in \Sigma^*$ .
- (b) Folgern Sie aus der (a), dass  $L$  genau dann regulär ist, wenn  $L$  endlich viele (unterschiedliche) Residualsprachen besitzt, also  $|\{L^w : w \in \Sigma^*\}| < \infty$ .
- (c) Konstruieren Sie den kanonischen Minimalautomaten zu dem regulären Ausdruck  $r := ab \mid ba^*$ , indem Sie einen Zustand  $[w]_{\equiv_{L(r)}}$  nicht mit dessen Äquivalenzklasse, sondern mit einem regulären Ausdruck für die Residualsprache  $L(r)^w$  beschriften.

### Übungsaufgabe Ü5.7. (Pfeilsprachen)

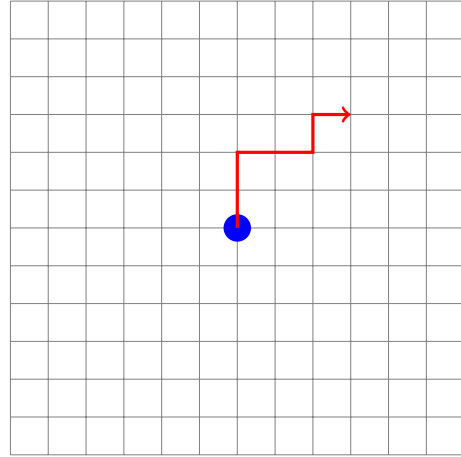
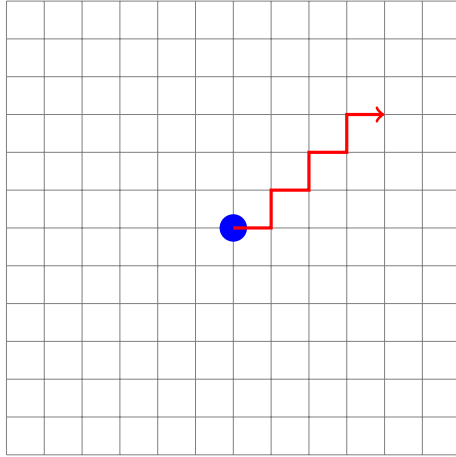
In dieser Aufgabe betrachten wir Sprachen, deren Worte Linienzüge in einem unendlichen zweidimensionalen Gitter von einem fixen Startpunkt aus beschreiben. Die folgende Grafik zeigt einen Ausschnitt aus dem Gitter:



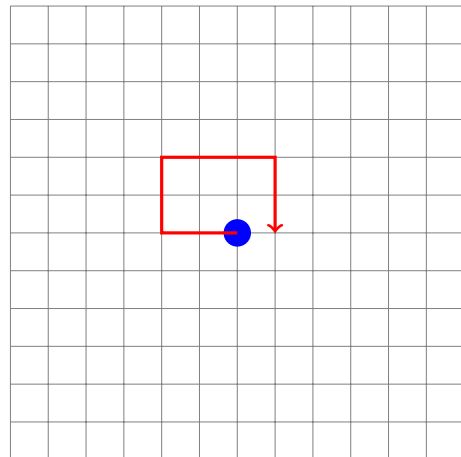
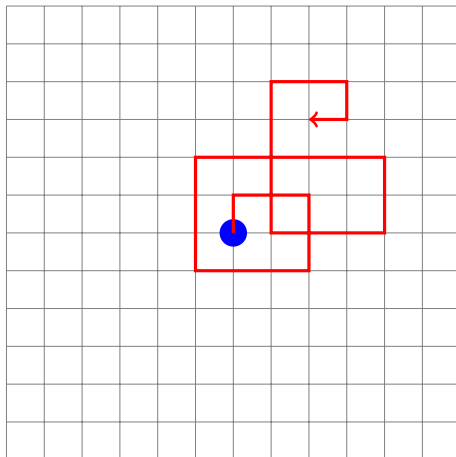
Wir haben Startpunkt blau markiert. Linienzüge beschreiben wir im Folgenden als eine Sequenz von Pfeilen, d.h. als Worte über dem Alphabet  $\Sigma = \{\rightarrow, \leftarrow, \uparrow, \downarrow\}$ . Die Pfeile beschreiben dabei (vom Startpunkt aus gesehen) einen ein Kästchen langen Schritt entlang des Gitters. Wir stellen daher den im Bild rot eingezeichnete Linienzug durch das Wort  $w = \rightarrow \rightarrow \uparrow \leftarrow \leftarrow \leftarrow \downarrow$  dar.

(a) Betrachten Sie die folgenden natürlich sprachlichen Beschreibungen zusammen mit jeweils einem Beispiel, welches in der Sprache liegt (auf der linken Seite), und einem Beispiel, das kein Element der Sprache ist (auf der rechten Seite). *Geben Sie für jede der Sprachen eine formale Definition der Form  $\{w \in \Sigma^* \mid \dots\}$  an.*<sup>3</sup>

(1) die Sprache aller Treppen über dem Alphabet  $\Sigma' = \{\rightarrow, \uparrow\}$

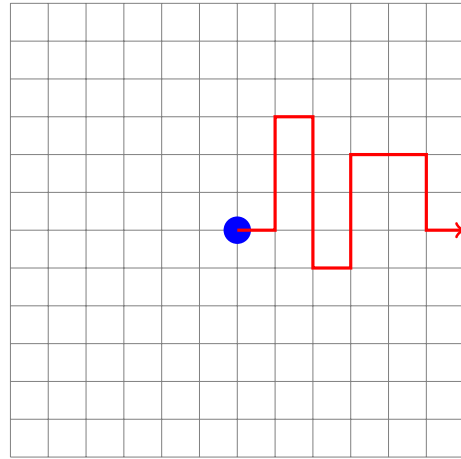
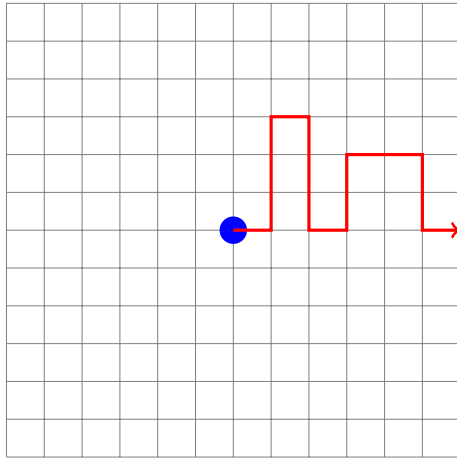


(2) die Sprache aller im Uhrzeigersinn laufenden Spiralen über dem Alphabet  $\Sigma$ , die vom Startpunkt aus zuerst nach oben laufen



(3) die Sprache aller “Skylines” über dem Alphabet  $\Sigma'' = \{\rightarrow, \uparrow, \downarrow\}$

<sup>3</sup>Das heißt insbesondere, dass Sie in diesem Aufgabenteil keinen Automaten, keinen regulären Ausdruck, keine Grammatik oder ähnliches angeben sollen, die die Sprache beschreiben.



*Hinweis:* Die Sprachen sind mithilfe der Beispiele nicht eindeutig bestimmt! Ziel der Aufgabe ist es, die intuitive Beschreibung (z.B. “Sprache aller Skylines”) zusammen mit den Beispielen in eine möglichst allgemeine Sprachdefinition zu bringen.

- (b) Stellen Sie Vermutungen auf, ob die obigen Sprachen regulär oder kontextfrei sind. Begründen Sie Ihre Antwort möglichst anschaulich anhand des Beispiels.
- (c) Geben Sie zu jeder der Sprachen  $L$  aus Aufgabenteil (a) eine Grammatik  $G$  an.