Prof. Javier Esparza
Philipp Czerner, Martin Helfrich

Technische Universität München
Lehrstuhl für Theoretische Informatik

Einführung in die Theoretische Informatik

Sommersemester 2021 – Übungsblatt 4

- Das Übungsblatt ist in zwei Teile gegliedert: den Vorbereitungsteil, den Sie vor der Übung selbstständig bearbeiten sollen, und den Übungs-/Nachbereitungsteil, der Aufgaben enthält, die in der Übung besprochen werden und von Ihnen anschließend zur Nachbereitung verwendet werden können.
- Das ist nicht das Hausaufgabenblatt! Die Hausaufgaben finden Sie auf einem separaten Blatt.

Vorbereitung (→ vor der Übung selbständig zu bearbeiten)

Individualaufgabe Ü4.1. (*Wichtige Begriffe*)

Überprüfen Sie, dass Sie die folgenden Begriffe oder Notationen korrekt definieren können.

- Äquivalenzklasse
- Kanonischer Minimalautomat
- Minimierung
- Myhill-Nerode-Relation

Individualaufgabe Ü4.2. (*Kahoot*)

Falls Sie das Kahoot aus der Vorlesung verpasst haben: Spielen Sie es jetzt! Link.[1]

Individualaufgabe Ü4.3. (*Automata Tutor: "Equivalenz Classes"*)

Lösen Sie die Aufgaben Ü4.3 (a–c) auf Automata Tutor.[2]

Lösungsskizze.

(a) (i) $\epsilon \equiv_L a$ mit Suffix $a^*b^*c^*$

(ii) $b \not\equiv_L c$; unterschieden durch b

(iii) $abv \not\equiv_L cba$; unterschieden durch ϵ

(b) (i) $b, bb, aab \in [ab]_L$

(ii) $c, cc, abc \in [bc]_L$

(iii) $cb, ba, ccb \in [cb]_L$

(c) (i) b ist lexikographisch kleinstes Element in $[abab]_L$

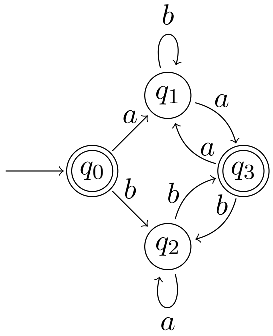
(ii) c ist lexikographisch kleinstes Element in $[bacc]_L$

Individualaufgabe Ü4.4. (*verbesserter Minimierungsalgorithmus*)

(a) Minimieren Sie den folgenden DFA.

[1] Falls der Link nicht mehr funktioniert, teilen Sie dies bitte der Übungsleitung mit. Die Teilnehmeranzahl ist leider auf 2000 begrenzt.

[2] Wenn Sie Automata Tutor noch nicht verwendet haben, folgen Sie erst den Schritten in Ü1.2, um sich richtig zu registrieren.



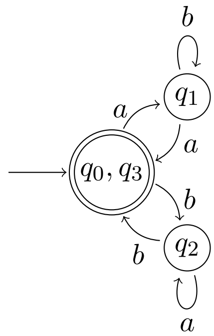
(b) Überlegen Sie sich, wie man den Minimierungsalgorithmus aus der Vorlesung abändern könnte, damit er neben einem minimalen DFA auch noch für jedes Paar an Zuständen (q_1, q_2), die nicht äquivalent sind, ein möglichst kurzes Wort w generiert, das beweist, dass q_1 und q_2 nicht äquivalent sind.
Wenden Sie den neuen Algorithmus auf den DFA aus (a) an.

Lösungsskizze.

(a) Hier die Tabelle aus dem Minimierungsalgorithmus (in zwei äquivalenten Darstellungen) und der minimierte DFA:

	q_0	q_1	q_2	q_3
q_0	–	–	–	–
q_1	$\times$	–	–	–
q_2	$\times$	$\times$	–	–
q_3	$=$	$\times$	$\times$	–

0			
$\times$	1		
$\times$	$\times$	2	
$=$	$\times$	$\times$	3



(b) Statt in der Tabelle nur mit einem Kreuz ($\times$) zu markieren, dass zwei Zustände unterscheidbar sind, merken wir uns in der Tabelle ein Wort, das sie unterscheidet. Gegeben ein DFA $(Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$. Im ersten Schritt, tragen wir bei allen Paaren $q_1 \in F, q_2 \in Q \setminus F$ das leere Wort ε ein. Dann iterieren wir so lange über die Tabelle, bis sich nichts mehr ändert. Immer wenn wir zwei Zustände $q_1, q_2 \in Q$ mit dem Zeichen $x \in \Sigma$ unterscheiden können, tragen wir als Beweis xw in die Tabelle ein, wobei $w \in \Sigma^*$ der Beweis aus der Tabelle ist, dass $\delta(q_1, x), \delta(q_2, x)$ unterscheidbar sind. Hier die Tabelle von Aufgabe (a), die durch den neuen Minimierungsalgorithmus entsteht:

	q_0	q_1	q_2	q_3
q_0	–	–	–	–
q_1	ε	–	–	–
q_2	ε	a	–	–
q_3	$=$	ε	ε	–

0			
ε	1		
ε	a	2	
$=$	ε	ε	3

Übung und Nachbereitung

Fokusaufgabe Ü4.5. (*Myhill-Nerode-Relation und Äquivalenzklassen*)

Sei $L = L(a^*b^*c^*)$ über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$.

(a) Entscheiden Sie, welche der folgenden Äquivalenzen wahr sind und begründen Sie Ihre Antwort:

- $\varepsilon \overset{?}{\equiv}_L a$
- $b \overset{?}{\equiv}_L c$
- $abc \overset{?}{\equiv}_L cba$

(b) Sei $v = aababc$. Geben Sie ein Wort $u \neq v$ an, so dass $u \equiv_L v$.

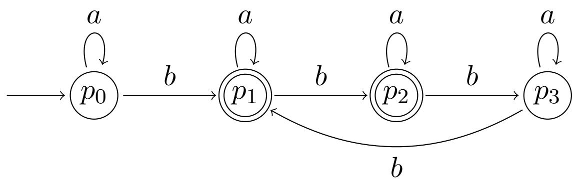
(c) Geben Sie die Mengen $[ab]_L$, $[bc]_L$ und $[ca]_L$ an.

(d) Finden Sie nun L', sodass $c \equiv_{L'} ba$, $c \not\equiv_{L'} ab$ und $aba \equiv_{L'} bab$. Weiterhin soll $\varepsilon, aba \in L'$ gelten.

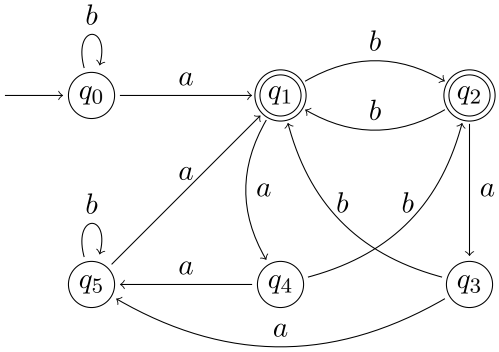
Übungsaufgabe Ü4.6. (*Minimierung*)

Minimieren Sie die folgenden DFAs mit Hilfe des verbesserten Minimierungsalgorithmus aus Aufgabe Ü4.4 (b), der für jedes unterscheidbare Paar an Zuständen ein Wort liefert, das die Zustände unterschiedet.

(a) DFA D_1



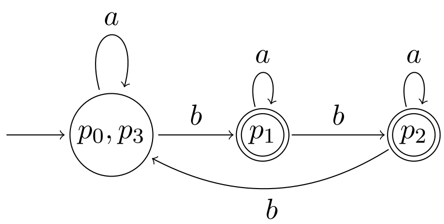
(b) DFA D_2



Lösungsskizze.

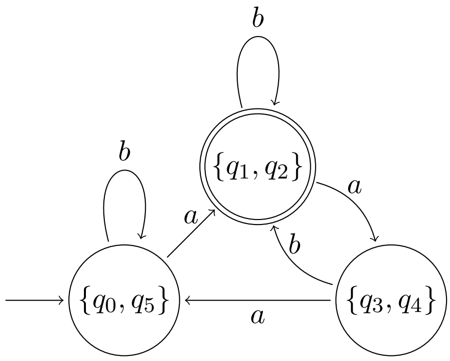
(a) Tabelle und minimierter DFA für D_1:

	p_0	p_1	p_2	p_3
p_0	–	–	–	–
p_1	ε	–	–	–
p_2	ε	b	–	–
p_3	$=$	ε	ε	–



(b) Tabelle und minimierter DFA für D_2:

	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5
q_0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
q_1	ε	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
q_2	ε	$=$	$-$	$-$	$-$	$-$
q_3	b	ε	ε	$-$	$-$	$-$
q_4	b	ε	ε	$=$	$-$	$-$
q_5	$=$	ε	ε	b	b	$-$



Übungsaufgabe Ü4.7. (*Myhill-Nerode-Relation*)

Hinweis: Bei dieser Aufgabe ist es nicht essentiell, dass Sie alle Teilaufgaben bearbeiten. Die ersten beiden Teilaufgaben reichen aus, um das Prinzip zu verstehen.

Entscheiden Sie, ob folgende Sprachen über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$ regulär sind. Bestimmen Sie hierzu die Äquivalenzklassen der dazugehörigen Myhill-Nerode-Relation. Falls die Sprache regulär ist, zählen Sie alle Äquivalenzklassen auf und zeichnen Sie den kanonischen Minimalautomat $M_L = (\Sigma^*/\equiv_L, \Sigma, \delta_L, [\varepsilon]_{\equiv_L}, F_L)$. Falls die Sprache nicht regulär ist, reicht es eine unendliche Menge von Äquivalenzklassen zu bestimmen.

(a) $L_1 = \{a^{2i} \mid i \in N\}$

(b) $L_2 = \{a^i b^i c^i \mid i \in N\}$

(c) $L_3 = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a = 2 \cdot |w|_b\}$

(d) $L_4 = L((a^*(b \mid c))^*)$

(e) $L_5 = \{wcw \mid w \in \{a, b\}^*\}$

(f) $L_6 = L((bba|bab)^*)$ mit dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$

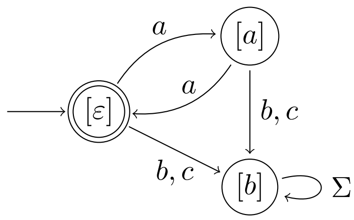
(g) $L_7 = \{w \in \Sigma^* \mid w \neq w^R\}$ mit dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$

Lösungsskizze. Hinweis: Da die Sprachen aus dem Kontext ersichtlich sind, lassen wir den L_i Subscript bei $\equiv$ und $[w]$ weg.

(a)
- Bestimmen der Äquivalenzklassen:

$$[\varepsilon] = L_1 \qquad [a] = \{a^{2i+1} \mid i \in N\} \qquad [b] = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_b > 0 \vee |w|_c > 0\}$$

- Kanonischer DFA:

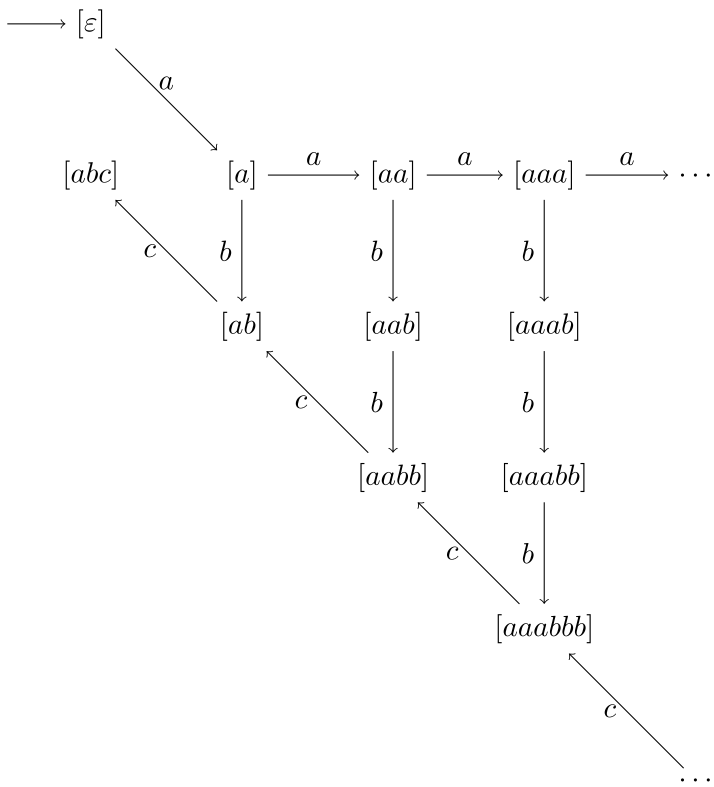


(b)
- Bestimmen einer unendlichen Menge von Äquivalenzklassen:

$$\{[a^i] \mid i \in N\}$$

Beweis: Sei $i, j \in N$ verschieden. Dann $a^i b^i c^i \in L_2$, aber $a^j b^i c^i \notin L_2$. Daher $[a^i] \neq [a^j]$. Somit ist die Menge unendlich und L_2 keine reguläre Sprache.

- Unendliches Transitionssystem (Ablehnende Äquivalenzklasse und entsprechende Transitionen sind nicht gezeichnet):



(c) - Bestimmen einer unendlichen Menge von Äquivalenzklassen:

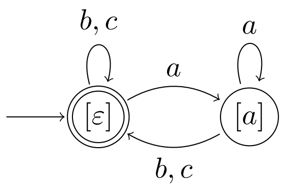
$$\{[b^i] \mid i \in N\}$$

Beweis: Sei $i, j \in N$ verschieden. Dann $b^i a^{2\cdot i} \in L_3$, aber $b^j a^{2\cdot i} \notin L_3$. Daher $[b^i] \neq [b^j]$. Somit ist die Menge unendlich und L_3 keine reguläre Sprache.

(d) - Bestimmen der Äquivalenzklassen:

$$[\varepsilon] = L((a^*(b \mid c))^*) = L_4 \qquad [a] = L((a \mid b \mid c)^* a)$$

- Kanonischer DFA:



(e) - Bestimmen der unendlichen Menge von Äquivalenzklassen:

$$\{[a^i b^i] \mid w \in \Sigma^*\}$$

Beweis: Sei $i, j \in N$ verschieden. Dann $a^i b^i c a^i b^i \in L_5$, aber $a^j b^j c a^i b^i \notin L_5$. Somit ist die Menge unendlich und L_5 keine reguläre Sprache.

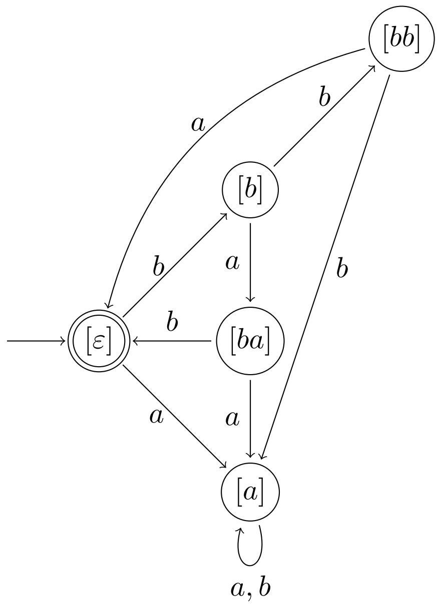
(f)
- Bestimmen der Äquivalenzklassen:

$$[\varepsilon] = L_6 \qquad [b] = \{wb \mid w \in L_6\}$$

$$[ba] = \{wba \mid w \in L_6\} \qquad [bb] = \{wbb \mid w \in L_6\}$$

$$[a] = \{vw \mid v \in L_6, w \in L((a \mid bbb \mid baa)(a|b)^*)\}$$

- Kanonischer DFA:



(g) Bestimmen einer unendlichen Menge von Äquivalenzklassen:

$$\{[(ab)^i] \mid i \in N\}$$

Beweis: Sei $i, j \in N$ verschieden und ohne Einschränkung der Allgemeinheit $i < j$. Dann gilt $(ab)^i(ba)^i \notin L_2$. Für $w = (ab)^j(ba)^i$ ist aber $w^R = (ab)^i(ba)^j$ und somit gilt wegen $i < j$ dass $w \in L_7$. Daher $[(ab)^i] \neq [(ab)^j]$. Somit ist die Menge unendlich und L_7 keine reguläre Sprache.