

Einführung in die Theoretische Informatik

Sommersemester 2021 – Übungsblatt 2

- Das Übungsblatt ist in zwei Teile gegliedert: den Vorbereitungsteil, den Sie vor der Übung selbstständig bearbeiten sollen, und den Übungs-/Nachbereitungsteil, der Aufgaben enthält, die in der Übung besprochen werden und von Ihnen anschließend zur Nachbereitung verwendet werden können.
- Das ist nicht das Hausaufgabenblatt! Die Hausaufgaben finden Sie auf einem separaten Blatt.

Vorbereitung (→ vor der Übung selbstständig zu bearbeiten)

Individualaufgabe Ü2.1. (Wichtige Begriffe)

Überprüfen Sie, dass Sie die folgenden Begriffe oder Notationen korrekt definieren können.

- Regulärer Ausdruck
- ϵ -NFA
- Rechtslineare Grammatik
- Potenzmengenkonstruktion
- Produktkonstruktion
- Strukturelle Induktion

Individualaufgabe Ü2.2. (Automata Tutor: Reguläre Ausdrücke)

Lösen Sie die Aufgaben Ü2.2 (a–g) auf Automata Tutor.¹ Beachten Sie, dass wir für einen regulären Ausdruck r das folgende Makro definieren: $r^+ = rr^*$.

Achtung: Für die Übungsaufgaben haben Sie beliebig viele Versuche. Für die Aufgaben in Hausaufgabe H2.1 nicht!

Individualaufgabe Ü2.3. (Konstruieren von NFAs mit Einschränkungen)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen korrekt sind, und begründen Sie Ihre Behauptung, indem Sie entweder ein Gegenbeispiel oder eine passende Konstruktion angeben.

Für jeden NFA $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ gibt es einen NFA $N' = (Q', \Sigma, \delta', q'_0, F')$ mit $L(N) = L(N')$ und ...

- der Startzustand hat keine eingehenden Kanten.
- kein Endzustand hat eine ausgehende Kante.
- für jeden Zustand q gilt: alle eingehenden Kanten von q sind mit demselben Zeichen beschriftet.
- für jeden Zustand q gilt: alle ausgehenden Kanten von q sind mit demselben Zeichen beschriftet.

Zu dieser Aufgabe gibt es Video-Lösungen: (a) (b) (c) (d)

¹Wenn Sie Automata Tutor noch nicht verwendet haben, folgen Sie erst den Schritten in Ü1.2, um sich richtig zu registrieren.

Lösungsskizze.

(a) Ja: Man erstellt vom Startzustand q_0 eine Kopie q'_0 , die nur die ausgehenden Kanten von q_0 erbt. Danach wird q_0 zu einem normalen Zustand, während q'_0 zu einem Startzustand wird. Formal: $N' = (Q', \Sigma, \delta', q'_0, F')$, wobei

- $Q' = Q \cup \{q'_0\}$,
- $\delta' = \delta \cup \{(q'_0, x, q) : (q_0, x, q) \in \delta\}$
- $F' = F \cup \{q'_0 : q_0 \in F\}$

(b) Nein: Betrachte einen NFA N für $L = \{\varepsilon, a\}$.

(c) Ja: man spaltet jeden Zustand $q \in Q$ nach dem Buchstaben der eingehenden Kanten auf, d.h. aus q macht man die Zustände (q, x) für jedes $x \in \Sigma$.

Danach setzt man $\delta'((q, x), y, (q', y)) := \delta(q, y, q')$.

Wird dabei der Startzustand aufgespalten, wählt man einen beliebigen daraus hervorgehenden Zustand als neuen Startzustand.

(d) Nein: Betrachte einen NFA N mit $L(N) = \{a, b\} = \Sigma$. Dann gilt $\delta(q_0, a) \cap F \neq \emptyset$ und $\delta(q_0, b) \cap F \neq \emptyset$.

Individualaufgabe Ü2.4. (*Potenzmengenkonstruktion*)

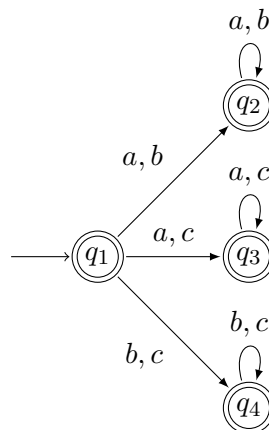
Mit $|w|_x$ bezeichnen wir die Anzahl der Vorkommen des Buchstabens $x \in \Sigma$ in $w \in \Sigma^*$. Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$ und $L = \{w \in \Sigma^* \mid \exists x \in \Sigma : |w|_x = 0\}$.

- (a) Konstruieren Sie einen NFA N mit genau 4 Zuständen und $L(N) = L$.
- (b) Determinisieren Sie den NFA N aus (a) mittels der Potenzmengenkonstruktion, um einen DFA M mit $L(M) = L(N)$ zu erhalten.

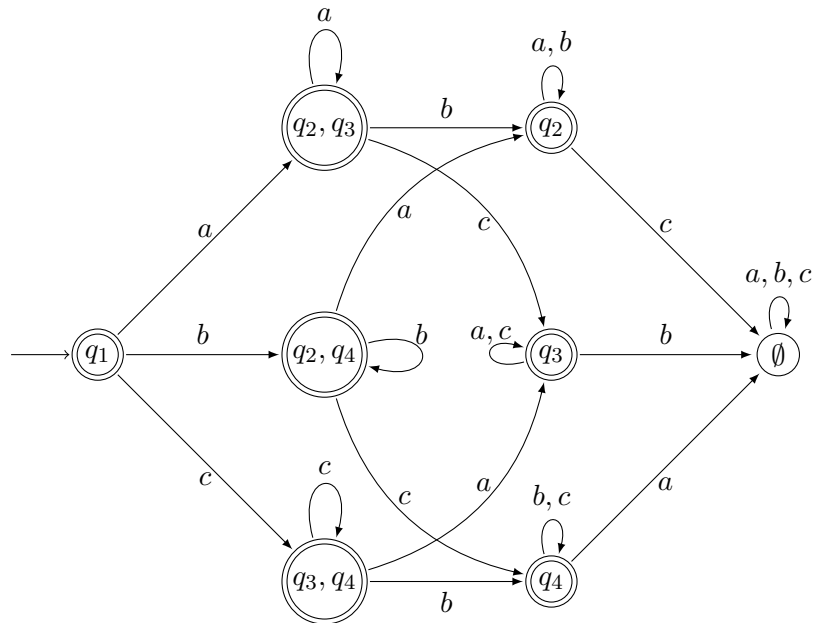
Zu dieser Aufgabe gibt es Video-Lösungen: (a) (b)

Lösungsskizze.

(a) Der folgende NFA rät im initialen Zustand welche beiden Buchstaben im Wort auftauchen:



(b) Anwendung der Potenzmengenkonstruktion:



Übung und Nachbereitung

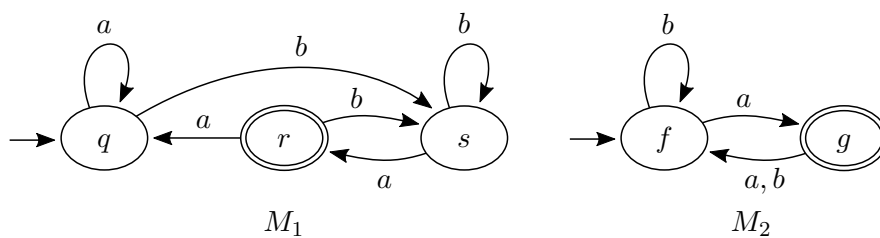
Fokusaufgabe Ü2.5. ($RA \rightarrow \epsilon\text{-NFA} \rightarrow \text{NFA} \rightarrow \text{DFA}$)

Wir betrachten den regulären Ausdruck $r = 1(0|1)^*|0$.

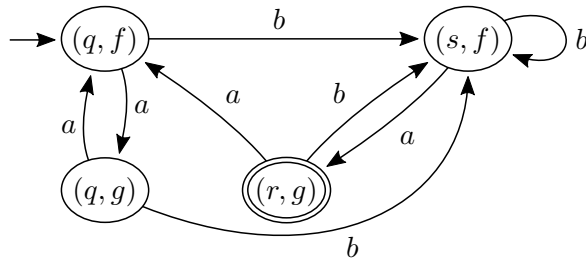
- Konstruieren Sie für r mit dem Standardverfahren aus der Vorlesung einen ϵ -NFA A , so dass $L(r) = L(A)$ gilt.
- Wandeln Sie diesen Automaten in einen äquivalenten NFA ohne ϵ -Übergänge um.
- Konstruieren Sie durch Anwendung des Potenzmengenverfahrens einen DFA, der die Sprache des Ausdrucks r akzeptiert.

Übungsaufgabe Ü2.6. (Produktkonstruktion)

Konstruieren Sie einen DFA M mit $L(M) = L(M_1) \cap L(M_2)$, indem Sie die Produktkonstruktion verwenden. Ist M minimal?



Lösungsskizze.



Der DFA M ist nicht minimal. Er akzeptiert die gleiche Sprache wie M_1 .

Übungsaufgabe Ü2.7. (Teilwörter und reguläre Sprachen)

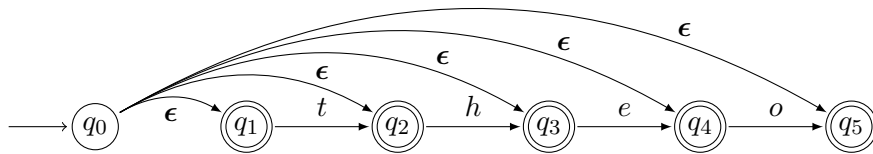
Ein Teilwort eines Wortes w ist ein zusammenhängendes Wort in w . Wir definieren die Menge aller Teilwörter von w als $\downarrow[w] := \{w' \in \Sigma^* : w \text{ enthält } w'\}$. Also gilt beispielsweise $the, he, theo, \varepsilon \in \downarrow[theo]$, aber $to, theoo \notin \downarrow[theo]$. Die Menge aller Wörter, von denen w ein Teilwort ist, ist dann entsprechend definiert als $\uparrow[w] := \{w' \in \Sigma^* : w' \text{ enthält } w\}$; z.B. $thetheotee \in \uparrow[theo]$. Wir erweitern dies auf Sprachen: Für eine beliebige Sprache $L \subseteq \Sigma^*$, definieren wir also $\downarrow[L] := \bigcup_{w \in L} \downarrow[w]$, und $\uparrow[L] := \bigcup_{w \in L} \uparrow[w]$.

Sei nun $\Sigma := \{t, h, e, o\}$ und L eine beliebige reguläre Sprache.

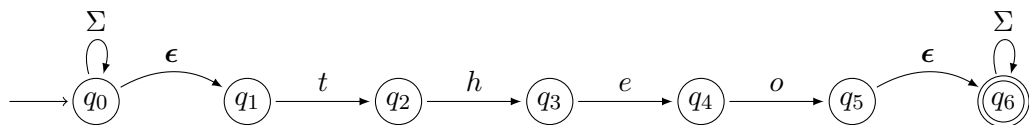
- (a) Geben Sie für $\downarrow[theo]$ und $\uparrow[theo]$ einen ϵ -NFA an.
- (b) Zeigen Sie, dass $\downarrow[L]$ regulär ist.
- (c) Zeigen Sie, dass $\uparrow[L]$ regulär ist.

Lösungsskizze.

- (a) ϵ -NFA für $\downarrow[theo]$:



ϵ -NFA für $\uparrow[theo]$:



- (b) Wenn L regulär ist, gibt es einen NFA $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ der L akzeptiert und bei dem jeder Zustand von q_0 erreichbar ist. Wir zeigen, dass es einen ϵ -NFA N' gibt, der $\downarrow[L]$ akzeptiert, indem wir N modifizieren.

Idee: Da wir alle Teilwörter akzeptieren wollen, muss es in N' möglich sein, ein Präfix zu überspringen. Dafür führen wir einen neuen Startzustand ein, der jeden anderen Zustand mit einem ϵ -Übergang erreichen kann. Da auch ein beliebiges Suffix gelöscht werden darf, wird jeder Zustand in N , der einen Endzustand erreichen kann, akzeptierend.

Wir definieren also ϵ -NFA $N' = (Q \cup \{q'_0\}, \Sigma, \delta', q'_0, F')$. Dabei ist

$$\begin{aligned}\delta' &= \delta \uplus \{(q'_0, \epsilon, q) : q \in Q\} \\ F' &= \{q \in Q : \exists w \in \Sigma^* : \hat{\delta}(q, w) \cap F \neq \emptyset\}\end{aligned}$$

Wir müssen zeigen: $L(N') = \downarrow[L]$.

\subseteq : Sei $w \in L(N')$. Dann gibt es einen akzeptierenden Lauf $q'_0 q_1 q_2 \dots q_k$ in N' . Da jeder Zustand in N und somit auch in N' erreichbar ist, gibt es ein Wort $u \in \Sigma^*$, so dass $q_1 \in \hat{\delta}(q_0, u)$. Per Definition von F' gibt es auch ein Wort $v \in \Sigma^*$, so dass $\hat{\delta}(q_k, v) \cap F \neq \emptyset$. Somit gilt, $uvw \in L(N)$. Aus $w \in \downarrow[uvw]$ folgt dann $w \in \downarrow[L]$.

\supseteq : Sei $w \in \downarrow[L]$. Per Definition wissen wir, dass es $u, v \in \Sigma^*$ gibt, sodass $uvw \in L$. Betrachte einen akzeptierenden Lauf für uvw in N . Sei $q_1 \dots q_k$ der Teil des Laufes, bei dem w eingelesen wird. Da in N von q_k mit v akzeptiert werden kann, ist q_k akzeptierend in N' . Dann ist $q'_0 q_1 \dots q_k$ ein akzeptierender Lauf in N' und somit $w \in L(N')$.

- (c) Wenn L regulär ist, gibt es einen NFA $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, der L akzeptiert. Wir zeigen, dass es einen ϵ -NFA N' gibt, der $\uparrow[L]$ akzeptiert, indem wir N modifizieren.

Idee: Da wir alle Wörter akzeptieren, die ein Wort aus L als Teilwort enthalten, muss es in N' möglich sein ein beliebiges Präfix, dann ein beliebiges Wort aus L , und dann einen beliebigen Suffix zu lesen. Also fügen wir einen neuen Startzustand ein, bei dem beliebige Zeichen gelesen werden kann. Dieser erreicht den alten Startzustand mit einem ϵ -Übergang. Statt zu akzeptieren, haben alle in N akzeptierenden Zustand einen ϵ -Übergang zum neuen Endzustand. In diesem wird jedes Wort akzeptiert.

Wir definieren also ϵ -NFA $N' = (Q \cup \{q'_0, q_f\}, \Sigma, \delta', q'_0, \{q_f\})$. Dabei ist

$$\begin{aligned}\delta' &= \delta \uplus \{(q'_0, x, q'_0) \mid x \in \Sigma\} \uplus \{(q'_0, \epsilon, q_0)\} \\ &\quad \uplus \{(q, \epsilon, q_f) \mid q \in F\} \quad \uplus \{(q_f, x, q_f) \mid x \in \Sigma\}\end{aligned}$$

Wir müssen zeigen: $L(N') = \uparrow[L]$.

\subseteq : Sei $w \in L(N')$. Dann gibt es einen akzeptierenden Lauf für w in N' . Nach Konstruktion lässt sich der Lauf in drei Teile unterteilen: Im ersten Teil befindet sich N nur in Zustand q'_0 , bis er mit einem ϵ -Übergang nach q_0 übergeht. Im zweiten Teil befindet sich N' nur in Zuständen von Q , bis er mit einem ϵ -Übergang von einem Zustand $q \in F$ nach q_f übergeht. Im letzten Teil befindet sich N' nur in q_f . Wir nennen die drei Teilwörter von w , die in den einzelnen Abschnitten eingelesen wurden, u, w' und v . Da es möglich ist von q_0 beim Einlesen von w' einen akzeptierenden Zustand q zu erreichen, gilt $w' \in L(N) = L$. Da $w = uw'v \in \uparrow[w']$, gilt somit $w \in \uparrow[L]$.

\supseteq : Sei $w \in \uparrow[L]$, es gibt also $u, w', v \in \Sigma^*$ mit $w = uw'v$ und $w' \in L$. Wegen $L(N) = L$ gibt es einen akzeptierenden Lauf für w' in N . Somit gibt es einen akzeptierenden Lauf für $uw'v$ in N' , bei dem erst u in q'_0 eingelesen wird, dann folgt der Lauf für w' aus N und danach wird v in q_f eingelesen. Somit gilt $w \in L(N')$.