Prof. Javier Esparza
Philipp Czerner, Martin Helfrich

Technische Universität München
Lehrstuhl für Theoretische Informatik

Einführung in die Theoretische Informatik

Sommersemester 2021 – Hausaufgabenblatt 13

Abgabe: 19.07.2021, 12:00 CEST

- Diese Woche werden alle Aufgaben korrigiert.
- Wenn Sie einen Beweis aufstellen, von dem Sie wissen, das einzelne Schritte problematisch oder unvollständig sind, merken Sie dies bitte in Ihrer Lösung an, damit wir das bei der Korrektur positiv berücksichtigen können.
- Um die Korrektheit einer Reduktion zu argumentieren, genügt es, die wesentlichen Argumente hinter Ihrer Konstruktion zu nennen. Ein vollständig präzises formales Argument ist nicht notwendig.
- $0 \in \mathbb{N}$

Aufgabe H13.1. (*2-EZ*) 0.5+0.5+0.5+0.5+0.5+0.5 Punkte

Bestimmen Sie für folgende Probleme jeweils, ob sie NP-vollständig sind, unter der Annahme P $\neq$ NP. Begründen Sie Ihre Antworten *kurz*.

(a) **Eingabe:** Aussagenlogische Formel F
Ausgabe: Existieren zwei erfüllende Belegungen für F ?

(b) **Eingabe:** Wörter $u, v \in \{0,1\}^*$
Ausgabe: Gibt es ein Wort $w \in \{0,1\}^{|uv|}$, sodass auf Eingabe w die DTM M_u in weniger Schritten als die DTM M_v hält? (M_v muss nicht halten.)

(c) **Eingabe:** Zwei endliche Mengen $A, B \subset \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$
Ausgabe: Gibt es $M \subseteq B$, $|M| \leq k$, sodass jedes $x \in A$ ein Element in M teilt?

(d) **Eingabe:** Aussagenlogische Formel F
Ausgabe: Existiert eine *äquivalente* Formel F' in konjunktiver Normalform?

(e) **Eingabe:** Vektoren $v_1, ..., v_k \in \mathbb{Z}^d$, $d \in \mathbb{N}$
Ausgabe: Existieren $x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m \in \{v_1, ..., v_k\}$, sodass $\sum_i x_i - \sum_i y_i = 0$, $n + m > 0$, und $\{x_1, ..., x_n\} \cap \{y_1, ..., y_m\} = \emptyset$?

(f) **Eingabe:** Ungerichteter Graph $G = (V, E)$
Ausgabe: Gibt es einen Kreis in G, der jeden Knoten und jede Kante genau einmal besucht? (Start und Ende werden nicht separat gezählt.)

Aufgabe H13.2. (*There are four colours! Four!*) 1+1+0.5+0.5+1+1 Punkte

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Für $k \in \mathbb{N}$ ist eine *k-Färbung* von G eine (totale) Funktion $f : V \to \{0, ..., k-1\}$ mit $f(u) \neq f(v)$ für alle $\{u, v\} \in E$. Es haben also alle benachbarten Knoten unterschiedliche Farben. Das *k-Färbbarkeitsproblem* (k-COL) ist folgendermaßen definiert, für $k \in \mathbb{N}$.

Eingabe: Ungerichteter Graph $G = (V, E)$
Ausgabe: Existiert eine k-Färbung für G ?

Unser Ziel ist es, zu zeigen, dass 3-COL ein NP-vollständiges Problem ist. Als Zwischenschritt betrachten wir eine Variante des Problems, bei dem eine Teilfärbung bereits vorgegeben ist. Für eine k-Färbung f ist eine *Teilfärbung* $f' : V \to \{0, ..., k-1\}$ eine beliebige partielle Funktion mit $f'(v) \in \{f(v), \perp\}$ für alle v. Das *partielle k-Färbbarkeitsproblem* (Partial-k-COL) ist nun

Eingabe: Ungerichteter Graph $G = (V, E)$, partielle Funktion $f' : V \to \{0, ..., k-1\}$
Ausgabe: Existiert eine k-Färbung f für G, mit Teilfärbung f' ?

(a) Zeigen Sie Partial-k-COL $\leq_p$ k-COL und k-COL $\leq_p$ Partial-k-COL für $k \in \mathbb{N}$. Es genügt hier, die Korrektheit Ihrer Reduktionen zu skizzieren, ein vollständiger Beweis ist nicht notwendig.

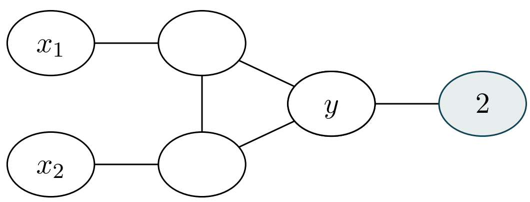
(b) Beweisen Sie k-COL $\in$ NP für $k \in \mathbb{N}$.

Nun wollen wir SAT auf Partial-3-COL reduzieren, indem wir die Farben verwenden, um logische Gatter zu simulieren. Wir verwenden Farben $\{0, 1, 2\}$, wobei 0 und 1 für wahr und falsch stehen, und 2 eine Farbe ist, die wir intern in unserem Schaltkreis verwenden, allerdings nicht als Eingabe oder Ausgabe. Zusätzlich betrachten wir mehrdeutige Gatter, die bei bestimmten Eingaben sowohl 1 als auch 0 ausgeben können.

Seien nun $n \in \mathbb{N}$ und $g : \{0, 1\}^n \to \mathcal{P}(\{0, 1\})$ beliebig. Wir wollen eine Instanz von Partial-k-COL konstruieren, also einen partiell gefärbten Graphen, die einen Schaltkreis darstellt, der g simuliert. Dazu verwenden wir Knoten $x_1, ..., x_n$ und y, wobei $x_1, ..., x_n$ die Eingabe abbilden (also mit beliebigen Farben in $\{0, 1\}$ gefärbt werden können), und y dann eine Farbe entsprechend g erhalten muss.

Formal sei $G = (V \cup \{x_1, ..., x_n, y\}, E)$ ein Graph, und $f' : V \to \{0, 1, 2\}$ eine partielle Funktion. Wir sagen, dass (G, f') ein *g-Gatter* ist, wenn für jede Funktion $I : \{x_1, ..., x_n\} \to \{0, 1\}$ eine 3-Färbung f von G existiert, sodass f' und I Teilfärbungen von f sind. Die Menge der Farben, die solche f dem Knoten y zuordnen können, muss genau $g(I(x_1), ..., I(x_n))$ entsprechen, es gilt also $\{f(y) : f\} = g(I(x_1), ..., I(x_n))$.

Die folgende Instanz ist z.B. ein `CHOICE`-Gatter, wobei $\texttt{CHOICE}(x_1, x_2) := \{x_1, x_2\}$ für $x_1, x_2 \in \{0, 1\}$. (Die Ausgabe entspricht also einer der Eingaben, darf sich aber aussuchen, welcher.)



(c) Konstruieren Sie ein `NOT`-Gatter, wobei $\texttt{NOT}(x_1) := \{\neg x_1\}$ für $x_1 \in \{0, 1\}$.

(d) Sei $\texttt{weakNOT}(x_1) := \texttt{NOT}(x_1) \cup \{0\}$. Konstruieren Sie ein `weakNOT`-Gatter.

(e) Konstruieren Sie ein `OR`-Gatter, mit $\texttt{OR}(x_1, x_2) := \{x_1 \vee x_2\}$ für $x_1, x_2 \in \{0, 1\}$.

(f) Beweisen Sie nun SAT $\leq_p$ Partial-3-COL.

Hinweis: Wenn Sie ein Objekt konstruieren, und es nicht offensichtlich ist, dass ihre Konstruktion den geforderten Bedingungen entspricht, begründen Sie dies kurz.

Aufgabe H13.3. (*Vollständig, oder fehlt da was?*) 1+1 Punkte

Zeigen Sie, dass das folgende Problem, was wir NTM-SIM nennen, NP-vollständig ist, indem Sie Definitionen 6.14 und 6.15 direkt verwenden. Sie dürfen also insbesondere nicht benutzen, dass wir von anderen Problemen (z.B. SAT) bereits gezeigt haben, dass diese NP-schwierig sind.

Eingabe: $v\$x\$1^n$ für $v, x \in \{0,1\}^*$, $n \in \mathbb{N}$
Ausgabe: Akzeptiert die NTM M_v die Eingabe x in höchstens n Schritten?

(a) Zeigen Sie NTM-SIM $\in$ NP .

(b) Beweisen Sie, dass NTM-SIM NP-schwierig ist.

Sie dürfen ohne Angabe von Details verwenden, dass eine Turingmaschine M eine beliebige andere TM M_w simulieren kann, auch wenn sie nur über w verfügt.

Aufgabe H13.4. (~~*Auf Wiedersehen!*~~ *Tschüss!*) 1+1 Punkte

Theo hat bald die Grundschule erfolgreich abgeschlossen, und wechselt auf eine weiterführende Schule. Dora freut sich riesig für ihn, und möchte eine große Abschiedsparty organisieren. Sie hat auch schon eine lange Liste mit Freunden und Bekannten, die sie einladen könnte. Leider gibt es ein paar Personen, die sich nicht leiden können und deswegen nicht gleichzeitig eingeladen werden sollten. Dora versucht herauszufinden, wie viele Leute sie maximal einladen kann. Können Sie ihr dabei helfen?

Wir betrachten hier das PARTY Problem.

Eingabe: Endliche Menge F an Freunden, Abneigungen $A \subseteq F \times F$, $k \in \mathbb{N}$
Ausgabe: Existiert ein $M \subseteq F$ mit $|M| \geq k$ und $M^2 \cap A = \emptyset$?

(a) Dora hat folgende Liste:

1. Theo
2. Dora
3. Bijanka
4. Theos Neffe
5. Eva Pirsalz
6. Jasper Vazarie
7. Tyx'Hxli E'Oozrt
8. Ehemaliger Rektor
9. Dokh'Toa Ivl'Zpaasa
10. Dr. Evilsparza
11. Kindergartenprofessor
12. Baukommissionsleiter

Folgende Personen verstehen sich nicht so gut und dürfen deshalb nicht beide eingeladen werden.

$$\{(2,5),(7,9),(8,12),(1,10),(5,11),(3,6),$$
$$(4,5),(3,12),(9,10),(6,9),(2,10),(8,11)\}$$

Wie viele Personen kann Dora maximal einladen? Beweisen Sie Ihre Antwort, und somit insbesondere, wieso es unmöglich ist, mehr Personen einzuladen.

(b) Zeigen Sie, dass PARTY ein NP-vollständiges Problem ist.

Wir hoffen, Sie hatten zumindest ein wenig Freude beim Bearbeiten der Aufgaben. Die Hausaufgabenzeit ist nunmehr bald vorbei – wir verabschieden uns und wünschen Ihnen fröhliche vorlesungsfreie Wochen!

—Ihr fiktionales THEO-Team

Theo & Dora