

## Einführung in die Theoretische Informatik

Sommersemester 2021 – Hausaufgabenblatt 12

**Abgabe: 12.07.2021, 12:00 CEST**

- Diese Woche werden alle Aufgaben korrigiert.
- Wenn Sie einen Beweis aufstellen, von dem Sie wissen, dass einzelne Schritte problematisch oder unvollständig sind, merken Sie dies bitte in Ihrer Lösung an, damit wir das bei der Korrektur positiv berücksichtigen können.
- Die genauen Details, wie wir die Eingabe einer Sprache kodieren, sind für uns nicht relevant. Es ist z.B. erlaubt  $\overline{\text{SAT}} = \{\text{Formel } F : F \text{ ist nicht erfüllbar}\}$  zu schreiben, obwohl eigentlich auch Wörter, die überhaupt keine Formel gültig kodieren, in  $\overline{\text{SAT}}$  enthalten wären. Eine Ausnahme bildet nur, wenn die Wahl der Kodierung die Länge der Eingabe signifikant beeinflussen würde (z.B. unäre/binäre Darstellung von Zahlen).
- Sie dürfen verwenden, dass Addition, Subtraktion und Multiplikation binäre dargestellter Zahlen in polynomieller Zeit berechnet werden kann.
- $0 \in \mathbb{N}$

### Aufgabe H12.1. (Eine Tautologie ist eine Tautologie)

1+1+1+1 Punkte

Doras Freundin Bijanka (eine Kaffeemaschine) geht es gerade nicht so gut. Sie sucht schon seit Stunden nach einer Lösung für eine Formel, die Theo ihr gesagt hat, kann trotz ihres hochmodernen Prozessors aber keine finden. (Dora vermutet, dass Theo mal wieder versucht, seine Hausaufgaben nicht selbst machen zu müssen.) Sie möchte Bijanka trösten, indem sie sich eine Formel ausdenkt, für die es ganz leicht ist, eine Lösung zu finden! Die NP-Probleme sind dafür schlecht, da es für sie schwierig ist, Lösungen zu finden – also denkt sich Dora eine neue Klasse aus, die sie *coffee-NP* (kurz *coNP*) nennt.

Wir definieren  $\text{coNP} := \{\overline{L} : L \in \text{NP}\}$ . Wir nennen eine aussagenlogische Formel  $F$  *Tautologie*, wenn  $F$  für jede Belegung erfüllt ist. Das Problem TAUTOLOGY ist nun

**Eingabe:** Aussagenlogische Formel  $F$

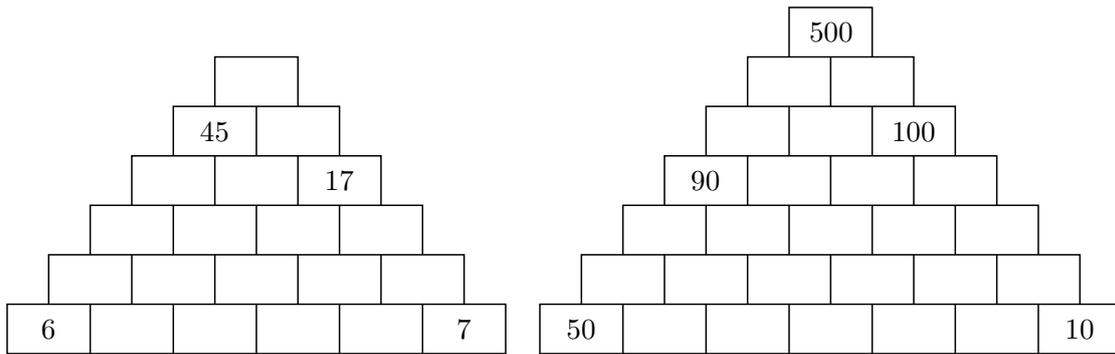
**Ausgabe:** Ist  $F$  eine Tautologie?

- Beweisen Sie  $\overline{\text{SAT}} \leq_p \text{TAUTOLOGY}$ .
- Seien  $L_1, L_2$  Sprachen. Zeigen Sie  $L_1 \leq_p L_2 \Leftrightarrow \overline{L_1} \leq_p \overline{L_2}$ .
- Seien  $L_1, L_2, L_3$  Sprachen. Zeigen Sie  $L_1 \leq_p L_2 \wedge L_2 \leq_p L_3 \Rightarrow L_1 \leq_p L_3$ .
- Zeigen Sie, dass TAUTOLOGY *coNP*-hart ist, also  $L \leq_p \text{TAUTOLOGY}$  für jedes  $L \in \text{coNP}$ .

### Aufgabe H12.2. (NP = Number Pyramids?)

2+1 Punkte

Der kleine Theo macht gerade seine Hausaufgaben (auch wenn eigentlich viel lieber den Pflützen beim Austrocknen zuschauen würde). Heute kamen Zahlenpyramiden dran:



Jedes Feld ist die Summe der beiden darunterliegenden Felder, und alle Felder sind mit ganzen Zahlen gefüllt (nur Pluszahlen). Formal ist das Problem PYRAMID wie folgt:

**Eingabe:**  $w_1 \dots w_k$ , mit  $w_i \in \{\square\} \cup \text{bin}(\mathbb{N})$  und  $k = 1 + \dots + n$  für ein  $n \in \mathbb{N}$

**Ausgabe:** Existiert eine Zahlenpyramide, deren  $i$ -tes Feld  $w_i$  enthält, für  $w_i \neq \square$  ?

Hierfür nummerieren wir die Felder durch, von oben nach unten und links nach rechts.

- (a) Konstruieren Sie eine Zertifikatssprache für PYRAMID (nach Def. 6.7), sodass das Zertifikat für  $w \in \text{PYRAMID}$  höchstens Länge  $p(|w|)$  hat, für ein Polynom  $p$ . Sie dürfen annehmen, dass jede lösbare Pyramide mit  $k$  Feldern eine Lösung hat, in der alle Zahlen höchstens  $D \cdot 2^k$  sind, wobei  $D$  die größte vorgegebene Zahl ist.

**Achtung:** Eine Begründung, wieso die Zertifikate die vorgegebene Länge haben, ist erforderlich.

- (b) Zeigen Sie, dass ein polynomiell beschränkter Verifikator für PYRAMID (bezüglich ihrer Zertifikate aus (a)) existiert, und somit  $\text{PYRAMID} \in \text{NP}$ .

*Anmerkung:* Können Sie die gezeigten Pyramiden (von Hand) lösen? Es gibt jeweils eine eindeutige Lösung. Für den geneigten Leser haben wir auch noch weitere Instanzen.

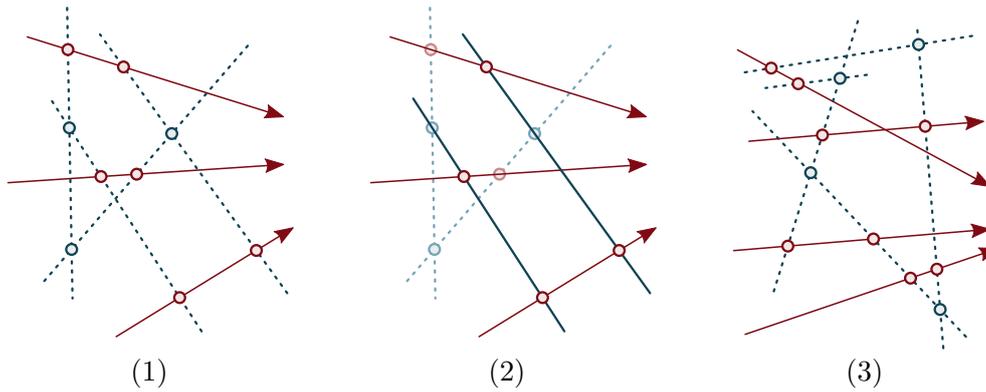
**Aufgabe H12.3.** (*Laser-focused*)

1+1+1+1+1 Punkte

Nachdem er sich einige Wochen lange verdeckt gehalten hatte, hatten die meisten den berühmten Superschurken Dr. Evilparza schon vergessen. Nun ist er aber wieder aufgetaucht, mit einem diabolischen Plan, die Weltherrschaft an sich zu reißen! Er hat eine Reihe von Superlasern aufgestellt, mit denen er direkt auf den THEO-Hausaufgabenserver zielt. Ohne Musterlösungen werden sicher alle Teilnehmer durchfallen, sodass es keine neuen Informatikabsolventen gibt, und alle auf das IT-Consultingunternehmen „Evilnest Evilness Software Inc“ angewiesen sind. Zum Glück hat der Lehrstuhl für KI (Klausurintegrität) einen Plan.

Spezielle, mit Spiegeln ausgestattete Drohnen können losgeschickt werden, um die Superlaser zu ihrer Quelle zurückzuschicken und so zu zerstören. Auf einer Karte sind bereits die Schusslinien der Laser eingezeichnet, die möglichen Flugbahnen der Drohnen, die Punkte, an denen eine Drohne den Laserstrahl kreuzen würde, und die Punkte, an denen sich die Flugbahn zweier Drohnen kreuzen würde. Letzteres würde zum Absturz beider Drohnen führen und muss unbedingt vermieden werden.

Ihre Aufgabe ist es nun, herauszufinden welche Drohnen gestartet werden müssen, sodass sich keine zwei Drohnen kreuzen und alle Laser zerstört werden.



Formal definieren wir das Klausurrettungsproblem (KRP) wie folgt:

**Eingabe:** Mengen an Geraden  $L, D$  und Schnittpunkte  $S \subseteq L \times D \cup D \times D$

**Ausgabe:** Existiert  $M \subseteq D$  mit  $M \times M \cap S = \emptyset$  und  $\{l\} \times M \cap S \neq \emptyset$  für alle  $l \in L$ ?

In der Zeichnung finden Sie eine Instanz des KRP (1), eine Lösung dieser Instanz (2), und eine weitere, unlösbare Instanz (3). Die Laser sind jeweils als Pfeile gezeichnet und die möglichen Flugbahnen der Drohnen als gestrichelte Linien. Beachten Sie insbesondere, dass nicht jeder Schnittpunkt von zwei Geraden bedeutet, dass sich die Drohnen bzw. Laser da kreuzen würden.

- Zeigen Sie  $\text{KRP} \leq_p \text{SAT}$ .
- Konstruieren Sie ein „Gadget“, um eine boolesche Variable zu modellieren. Wir suchen eine Instanz  $I_x = (L, D, S)$  mit  $x, \bar{x} \in D$ . Jede Lösung von  $I_x$  muss *entweder*  $x$  oder  $\bar{x}$  enthalten, und es muss Lösungen  $S_1, S_2$  mit  $x \in S_1, \bar{x} \in S_2$  geben.

In der Vorlesung werden wir das NP-vollständige Problem 3KNF-SAT kennen lernen. Dies führen wir hier vorab schon einmal ein, da es als Einschränkung von SAT die Reduktion leichter macht.

Sei  $X$  eine Menge an Variablen. Die Menge der *Literale* ist  $L := X \cup \{\neg x : x \in X\}$ , enthält also alle Variablen und Negationen von Variablen. Eine  $k$ -*Klausel* ist eine Formel der Form  $l_1 \vee l_2 \vee \dots \vee l_k$  mit  $l_1, \dots, l_k \in L$ , und eine Formel  $F$  ist in  $k$ -*konjunktiver Normalform* ( $k$ -KNF), wenn  $F = F_1 \wedge F_2 \wedge \dots \wedge F_n$ , wobei  $F_1, \dots, F_n$  jeweils  $k$ -Klauseln sind. Das Problem 3KNF-SAT ist nun

**Eingabe:** Aussagenlogische Formel  $F$  in 3-KNF

**Ausgabe:** Ist  $F$  erfüllbar?

Ein Beispiel für eine Instanz wäre also  $(\neg x \vee y \vee z) \wedge (x \vee \neg y \vee z) \wedge (x \vee y \vee \neg z)$ .

- Beschreiben Sie, wie Sie Klauseln der Länge 3 mithilfe ihres Gadgets aus (b) modellieren können, sodass jede Lösung der Instanz einer erfüllenden Belegung der Klausel entspricht, und umgekehrt. Demonstrieren sie Ihre Konstruktion anhand des Beispiels  $x \vee \neg y \vee z$ .
- Zeigen Sie  $3\text{KNF-SAT} \leq_p \text{KRP}$ .
- Konstruieren Sie eine KRP Instanz, die genau dann lösbar ist, wenn  $(x \vee \neg y \vee z) \wedge (\neg x \vee y \vee z)$  erfüllbar ist. Verwenden Sie hierzu Ihre Konstruktion aus (d).

**Bonusaufgabe H12.4.** (Teilerfolg)

1+1 Punkte

**Achtung:** Die Bonusaufgabe wird diese Woche separat korrigiert. Bitte fertigen Sie für diese Aufgabe eine getrennte Lösung an.

Wir betrachten wieder das KRP aus Aufgabe **H12.3**. Sie haben leider festgestellt, dass es unmöglich ist, alle von Dr. Evilsparzas Lasern zu stoppen, wollen aber nicht aufgeben. Gibt es vielleicht eine Möglichkeit, zumindest die meisten Laser aufzuhalten?

- (a) Zeigen Sie: Wenn die Flugbahn jeder Drohne mit höchstens einer anderen Drohne kollidieren würde, und jeder Laser von mindestens zwei Drohnen gestoppt werden kann, ist es möglich, mindestens  $\frac{3}{4}$  der Laser zu stoppen.
- (b) Beschreiben Sie ein Verfahren, das eine entsprechende Lösung in polynomieller Zeit auf einer DTM berechnet.

**Hinweis:** Vereinfachen Sie zunächst die Instanz und betrachten dann eine sinnvolle Teilmenge  $F$  der möglichen Lösungen. Wenn die Lösungen aus  $F$  im Durchschnitt mindestens  $\frac{3}{4}$  der Laser stoppen, dann tut es die beste Lösung aus  $F$  auch.