Prof. Javier Esparza
Philipp Czerner, Martin Helfrich

Technische Universität München
Lehrstuhl für Theoretische Informatik

Einführung in die Theoretische Informatik

Sommersemester 2021 – Hausaufgabenblatt 11

Abgabe: 05.07.2021, 12:00 CEST

- Sei $\Phi := \{\{1\}, \{2\}, \{3, 4\}\}$. Nach dem Abgabedatum werden wir für jede Menge $A \in \Phi$ eine zufällige Aufgabe $a \in A$ wählen und korrigieren.
- Wenn Sie einen Beweis aufstellen, von dem Sie wissen, das einzelne Schritte problematisch oder unvollständig sind, merken Sie dies bitte in Ihrer Lösung an, damit wir das bei der Korrektur positiv berücksichtigen können.
- $0 \in \mathbb{N}$, TMs sind deterministisch

Aufgabe H11.1. (*Do or do not. There is no try.*) 0.5+0.5+0.5+0.5+1 Punkte

Sei $\Sigma := \{0, 1\}$. Entscheiden Sie jeweils, ob folgende Aussagen wahr sind. Falls ja, geben Sie eine *kurze* Begründung an, ansonsten ein Gegenbeispiel.

(a) Sei $L \subseteq \Sigma^*$ unentscheidbar und $w \in L$. Dann ist $\{v : M_w[v]\downarrow\}$ unentscheidbar.

(b) Für zwei unentscheidbare Sprachen $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ ist $L_1 \cup L_2$ unentscheidbar.

(c) Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ total, berechenbar und bijektiv. Dann ist f^{-1} berechenbar.

(d) Für beliebige TMs M_1, M_2 ist die Sprache $L(M_1) \setminus L(M_2)$ semi-entscheidbar.

(e) Sei $L \subseteq \Sigma^*$ unendlich. Dann gibt es eine unentscheidbare Sprache $L' \subseteq L$.

Hinweis: Bitte beachten Sie, dass nach Definition $L(M)$, für eine TM M, die Sprache der Wörter ist, auf denen M in einem Haltezustand terminiert. Insbesondere ist $L(M)$ semi-entscheidbar, aber nicht unbedingt entscheidbar.

Aufgabe H11.2. (*The line must be drawn here! This far, no further!*) 4 Punkte

Wir nennen eine TM $2n$-platzbeschränkt, wenn sie für alle Eingaben mit Länge n den Lesekopf nicht weiter als $2n$ Felder vom Ursprung entfernt. Zeigen Sie, dass L unentscheidbar ist, mit

$$L := \{w \in \{0, 1\}^* : M_w \text{ ist } 2n\text{-platzbeschränkt}\}$$

Aufgabe H11.3. (*Downwards is the only way forwards.*) 2+3 Punkte

In der Vorlesung haben wir folgende Probleme für kontextfreie Grammatiken G_1, G_2 über einem Alphabet Σ kennengelernt:

$\langle 1 \rangle$ Ist $L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$?

$\langle 2 \rangle$ Ist $|L(G_1) \cap L(G_2)| < \infty$?

$\langle 3 \rangle$ Ist $L(G_1) \cap L(G_2)$ kontextfrei?

$\langle 4 \rangle$ Ist $L(G_1) \subseteq L(G_2)$?

$\langle 5 \rangle$ Ist $L(G_1) = L(G_2)$?

Von $\langle 1 \rangle$ wurde in der Vorlesung gezeigt, dass es unentscheidbar ist, $\langle 2 \rangle$ und $\langle 3 \rangle$ werden in der Übung behandelt. Es verbleiben $\langle 4 \rangle$ und $\langle 5 \rangle$, zeigen Sie also:

(a) $\langle 4\rangle \leq \langle 5\rangle$ (b) $\langle 1\rangle \leq \langle 4\rangle$

Hinweise: Zur Vereinfachung dürfen Sie $\Sigma = \{a, b\}$ jeweils für das zu reduzierenden Problem annehmen (ohne das Problem, auf das Sie reduzieren, einzuschränken). Für die (b) mag es sinnvoll sein, die Sprache $L(G_1)\{\$\}L(G_2)^R$ zu betrachten.

Aufgabe H11.4. (*No one can be told what The Matrix is.*) 1+1+3 Punkte

Doras Urgroßonkel, der ehemalige Rektor der TH Estlingen-Oberfeld, hat Geburtstag, und die ganze Familie ist eingeladen. Nach altem Estlinger Brauch gibt es statt Kerzen auf einer Geburtstagstorte einen Vektor mit dem Alter (er ist $(100)_7$ geworden), und statt zu pusten wird dieser Vektor so lange mit Matrizen multipliziert, bis er verschwunden ist. (Die Matrizen werden von den Gästen mitgebracht.) Leider hat Doras Urgroßonkel es dieses Jahr nicht geschafft, seinen Altersvektor wegzumultiplizieren, obwohl er sich viel Mühe gegeben hat. Dora möchte ihn nun trösten, und ihm beweisen, dass das Problem nicht immer gelöst werden kann.

Wir untersuchen nun das Vektorvernichtungsproblem (VVP):

Eingabe: Matrizen $M_1, ..., M_k \in \mathbb{Z}^{3\times 3}$, Vektor $v \in \mathbb{Z}^3$

Ausgabe: Existieren $A_1, ..., A_l \in \{M_1, ..., M_k\}$ mit $A_1 A_2 \cdots A_l v = 0$?

Unser Ziel ist, zu zeigen, dass das VVP unentscheidbar ist.

(a) Sei $M := \begin{pmatrix} 0 & v & -v \end{pmatrix}$, mit $v \in \mathbb{Z}^3$, und $M_1, ..., M_k \in \mathbb{Z}^{3\times 3}$, wobei $M_1, ..., M_k$ invertierbar sind. Zeigen Sie, dass das VVP für $M, M_1, ..., M_k; v$ genau dann eine Lösung hat, wenn es $A_1, ..., A_l \in \{M_1, ..., M_k\}$ gibt, sodass $M A_1 A_2 \cdots A_l v = 0$.

Wir verwenden wieder Zahlen, um Wörter darzustellen. Sei also $\Sigma := \{0, 1\}$ und $f : \Sigma^* \to \mathbb{N}$ definiert als $f(\varepsilon) := 0$ und $f(wc) := 3f(w) + c + 1$ für $w \in \Sigma^*$, $c \in \Sigma$. Insbesondere gilt somit $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$ für alle $u, v \in \Sigma^*$.

(b) Seien $x, y \in \Sigma^*$ beliebig. Konstruieren Sie eine Matrix $M_{x,y} \in \mathbb{Z}^{3\times 3}$ mit

$$M_{x,y} \begin{pmatrix} 1 \\ f(u) \\ f(v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ f(ux) \\ f(vy) \end{pmatrix} \qquad \text{für alle } u, v \in \Sigma^*.$$

(c) Zeigen Sie nun, dass das VVP unentscheidbar ist, indem sie 01-MPCP reduzieren.[1]

Erinnerung: Sei $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Folgende Aussagen sind äquivalent:

(1) M ist invertierbar

(2) $\det(M) \neq 0$

(3) $Mx \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$

[1] Wir haben zwar nicht explizit in der Vorlesung gezeigt, dass 01-MPCP unentscheidbar ist, aber der Beweis von Korollar 5.59 funktioniert unverändert.