Prof. Javier Esparza
Philipp Czerner, Martin Helfrich

Technische Universität München
Lehrstuhl für Theoretische Informatik

Einführung in die Theoretische Informatik

Sommersemester 2021 – Hausaufgabenblatt 10

Abgabe: 28.06.2021, 12:00 CEST

- Diese Woche werden alle Aufgaben korrigiert.
- Wenn Sie einen Beweis aufstellen, von dem Sie wissen, das einzelne Schritte problematisch oder unvollständig sind, merken Sie dies bitte in Ihrer Lösung an, damit wir das bei der Korrektur positiv berücksichtigen können.

Aufgabe H10.1. (*Auf- und Ab*) 0.5+0.5+0.5+0.5+0.5+0.5 Punkte

Wir betrachten folgende Eigenschaften: (1) abzählbar, (2) rekursiv aufzählbar, (3) semi-entscheidbar, und (4) entscheidbar. Geben Sie für jede der folgenden Mengen an, welche der vier Eigenschaften erfüllt sind. Bitte beachten Sie, dass (2-4) nur auf Sprachen definiert sind.

(a) $\emptyset$

(b) $\{w \in \mathbb{R} : w < \frac{1}{\sqrt{2}}\}$

(c) $\{w \in \{0, ..., 9\}^* : (\mathtt{0.}w)_{10} < \frac{1}{\sqrt{2}}\}$

(d) $\{w \in \{0,1\}^* : \{1, 10, 111\} \cap L(M_w) \neq \emptyset\}$

(e) $\{w \in \{0,1\}^* \mid \forall v \in L(M_w) : (7(v)_2 - 31)^2 > 8\}$

(f) $\{w \in \{0,1\}^* : M_w$ hält für ein $v \in \{0,1\}^*$ in $|v|$ Schritten$\}$

Eine Begründung ist nicht erforderlich. Für (c) verwenden wir die Notation aus H5.6. Sie können folgende Tabelle verwenden:

	(1)	(2)	(3)	(4)
(a)	·	·	·	·
(b)	·	·	·	·
(c)	·	·	·	·
(d)	·	·	·	·
(e)	·	·	·	·
(f)	·	·	·	·

Aufgabe H10.2. (*Rote Zahlen schreiben*) 3+2 Punkte

Heute ist „Tag der offenen Tür“ in Theos Schule und Dora besucht ihn. Es geht um Farbenzahlen, und besonders um die Farbe Rot. Theo hat leider letzte Woche nicht so gut aufgepasst, da er damit beschäftigt war, die Sandkörner in seinem Sandkasten zu zählen. Er kann sich nur noch daran erinnern, dass eine Zahl genau dann rot ist, wenn ihr größter echter Teiler rot ist. Was aber mit Zahlen passiert, die keine echten Teiler haben, weiß er nicht. Dora möchte ihm helfen, hat aber in der Kindergartenvorlesung bisher nur gelernt, welche *Prim*zahlen rot sind. Können Dora und Theo zusammen die gestellten Aufgaben lösen?

Sei $R \subseteq \mathbb{N}_{\geq 2}$ die Menge der roten Zahlen, und P die Menge der Primzahlen. Zur Erinnerung: Für $x, y \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ sagen wir „x ist ein *Teiler* von y“, oder $x \mid y$, wenn es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $xk = y$ gibt. Wenn zusätzlich $1 < x < y$, dann ist x ein *echter Teiler* von y. Falls x der größte echte Teiler von y ist, gilt also $y \in R \Leftrightarrow x \in R$.

(a) Theo möchte sich ein Verfahren ausdenken, mit dem er die Aufgaben lösen kann. Schreiben Sie also ein `WHILE`-Programm, das die charakteristische Funktion χ_R berechnet (siehe Definition 5.28). Verwenden Sie den zusätzlichen Befehl `dora`; nach Ausführung von `dora` wird x_0 auf 1 gesetzt, falls $x_1 \in R \cap P$, sonst auf 0. Erklären Sie ihren Ansatz in natürlicher Sprache.

Sie dürfen alle Makros aus der Vorlesung verwenden, sowie eigene definieren. Für eine beliebige *entscheidbare* Menge M und Variablennamen x, y dürfen Sie zudem $x := y \in M$ als Makro schreiben, das x auf $\chi_M(y)$ setzt. Sie dürfen auch $x := y \notin M$ verwenden, mit analoger Bedeutung.

(b) Zeigen Sie, dass R reduzierbar auf $R \cap P$ ist, indem sie eine berechenbare, totale Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ angeben, sodass $x \in R \Leftrightarrow f(x) \in R \cap P$ für jedes $x \in \mathbb{N}$ gilt.

Aufgabe H10.3. (*Semi-Entscheidbarkeit*) 2 Punkte

Sei $\Sigma := \{0, 1\}$. Zeigen Sie, dass die Sprache L, definiert als

$$\{w \in \Sigma^* : M_w \text{ hält für zwei unterschiedliche Eingaben in gleich vielen Schritten}\},$$

semi-entscheidbar ist. Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass es berechenbare, surjektive Funktionen $g : \mathbb{N} \to \Sigma^*$ und $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^k$ gibt, für beliebiges $k \in \mathbb{N}$.

Hinweise: Es ist nicht notwendig (und oft unerwünscht), eine TM formal präzise anzugeben. Achten Sie jedoch darauf, Ihre *Idee* genau zu schildern, sodass einem Leser klar ist, wie eine entsprechende TM auszusehen hätte.

Aufgabe H10.4. (*Alle Register ziehen*) 0.5+0.5+1 Punkte

Als es gerade den Oeehthto-Gürtel umrundet, wird Tyx'Hxli E'Oozrts Raumschiff von Piraten – geführt vom berüchtigten Dokh'Toa Ivl'Zpaasa – angegriffen. Tyx kann zwar gerade noch entfliehen, steht aber nun vor einem neuen Problem: Sein Bordcomputer wurde schwer beschädigt und fast alle Speicherbänke wurden zerstört. Ohne dessen Rechenkapazität kann Tyx aber unmöglich die quantenstatischen absolutitätstheoretischen Berechnungen ausführen, die für einen Hyperraumsprung notwendig sind. Können Sie Tyx helfen?

Unser Ziel ist es, mit einem `GOTO`-Programm, das nur auf die Variablen x_0 und x_1 zugreifen darf, ein beliebiges Programm zu simulieren. Wir definieren also die *Tyx-`GOTO`-Programme* als die `GOTO`-Programme, die nur die Variablen x_0 und x_1 verwenden.

(a) Beschreiben Sie, wie Sie Zahlen $y_1, ..., y_k \in \mathbb{N}$ über eine einzelne Zahl x darstellen können. Geben Sie also eine berechenbare, injektive Funktion $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ an, und beschreiben sie, wie sich $f(y_1, ..., y_k)$ verändert, wenn sie einzelne Komponenten von $(y_1, ..., y_k)$ inkrementieren oder dekrementieren.

(b) Implementieren Sie nun ein Tyx-`GOTO` Makro für $y_i := y_i + n$, mit $i \in \{1, ..., k\}$ und $n \in \mathbb{Z}$. Wenn vorher $x_0 = 0$ und $x_1 = f(y_1, ..., y_k)$ gilt (für $y_1, ..., y_k \in \mathbb{N}$), soll nach der Ausführung $x_0 = 0$ und $x_1 = f(y_1, ..., y_{i-1}, \max\{y_i + n, 0\}, y_{i+1}, ..., y_k)$ gelten.

(c) Zeigen Sie, dass das allgemeine Halteproblem für Tyx-`GOTO` Programme unentscheidbar ist, also die Sprache

$$L := \{P\#i : P, i \in \{0,1\}^* \wedge P \text{ ist Tyx-}\texttt{GOTO}\text{ Programm und hält auf } (i)_2\}$$