

Einführung in die Theoretische Informatik

Sommersemester 2021 – Hausaufgabenblatt 8

Abgabe: 14.06.2021, 12:00 CEST

- Sei $\Phi := \{\{1\}, \{2\}, \{3, 4\}, \{5\}\}$. Nach dem Abgabedatum werden wir für jede Menge $A \in \Phi$ eine zufällige Aufgabe $a \in A$ wählen und korrigieren.
- Es werden diese Aufgaben korrigiert: **H8.1, H8.2, H8.4, H8.5**

Aufgabe H8.1. (AT)

1+1+1 Punkte

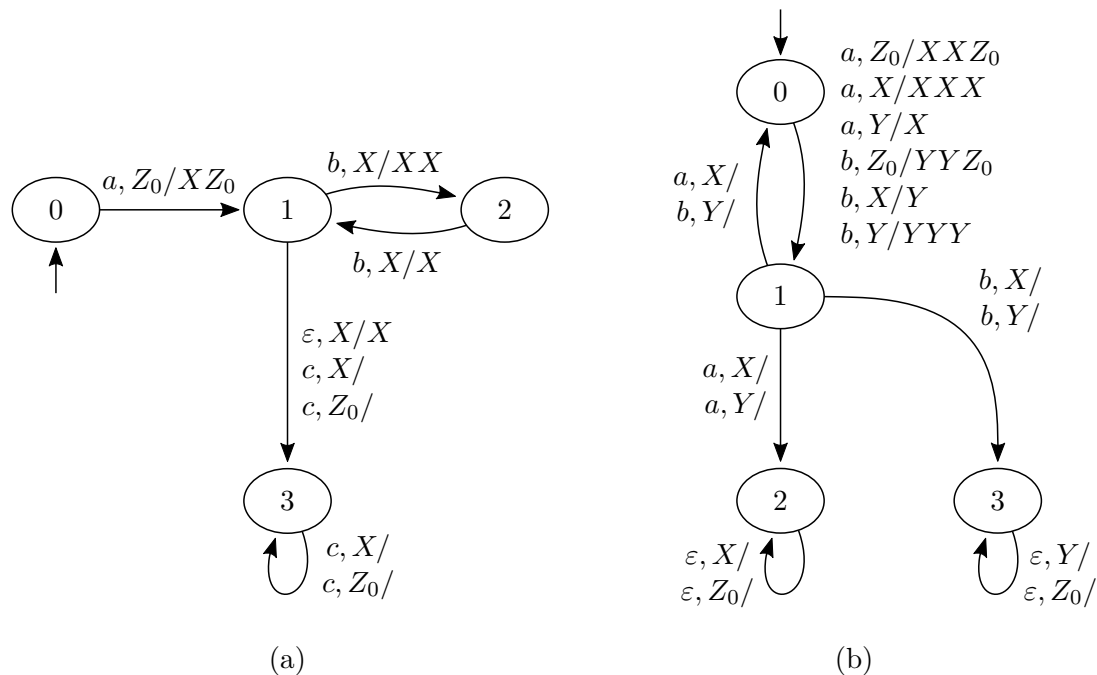
Diese Hausaufgabe wird mit [Automata Tutor](#) bearbeitet und abgegeben. Falls Sie es noch nicht bereits gemacht haben, folgen Sie den Schritten in Ü1.2, um ein Konto zu erstellen. Achten Sie darauf, dass Sie sich, wie dort beschrieben, mit Ihrer TUM-Kennung anmelden. Ansonsten können wir Ihnen die Punkte nicht gutschreiben.

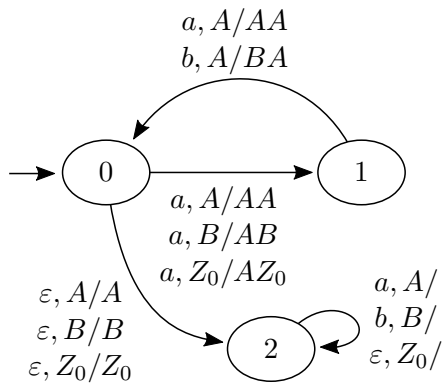
Bearbeiten Sie die Hausaufgaben **H8.1** (a–c). **Achtung:** Während Sie für die Aufgaben aus dem Übungsblatt beliebig viele Versuche hatten, haben Sie für jede Hausaufgabe nur 5 Versuche. Sie bekommen nur dann einen Punkt, wenn Sie die Aufgabe nach 5 Versuchen vollständig (also mit 10/10 Punkten) gelöst haben. Ihr konstruierter Automat darf nicht zu viele Zustände haben (siehe Aufgabenstellung). Wenn Sie einen ε -Übergang angeben wollen, geben Sie statt ε bitte **E** ein (siehe Hinweisbox über Canvas) und beim Entfernen eines Kellersymbols, lassen Sie den Teil hinter “/” bitte leer (Beispiel: “a, X/”).

Aufgabe H8.2. (Sprachfindung)

1+1+1+1 Punkte

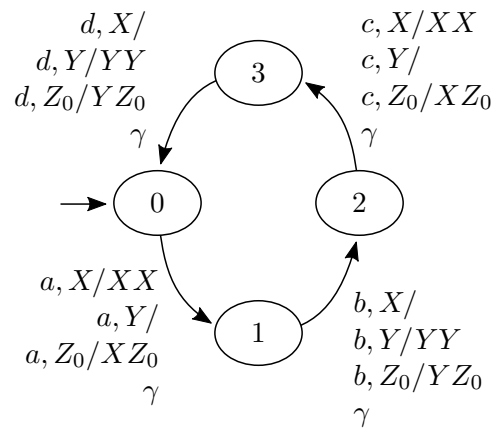
Geben Sie für die folgenden Kellerautomaten jeweils die akzeptierte Sprache in Mengennotation an. Die PDAs akzeptieren über leeren Keller.





(c)

$$\gamma := (\varepsilon, Z_0/Z_0 \quad \varepsilon, X/X \quad \varepsilon, Y/Y)$$



(d)

Aufgabe H8.3. (Kontextfreie Residualsprachen)

1+3+1 Punkte

Sei Σ ein Alphabet. Zur Erinnerung: Für eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ und ein Wort $w \in \Sigma^*$ ist $L^w := \{v : vw \in L\}$ die Residualsprache von L bezüglich w (siehe Ü5.6).

(a) Sei G folgende Grammatik:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow aC \mid Da \mid BC & C &\rightarrow aS \mid BC \\ B &\rightarrow BB \mid b & D &\rightarrow CB \mid \varepsilon \end{aligned}$$

Bestimmen Sie eine kontextfreie Grammatik für $L(G)^a$.

- (b) Sei $H = (V, \Sigma, P, S)$ eine beliebige kontextfreie Grammatik und $c \in \Sigma$. Beschreiben Sie ein allgemeines Verfahren, um eine kontextfreie Grammatik $H' = (V', \Sigma, P', S')$ mit $L(H') = L(H)^c$ zu konstruieren.
- (c) Führen Sie Ihr Verfahren auf der Grammatik G aus, um eine Grammatik für $L(G)^b$ zu bestimmen.

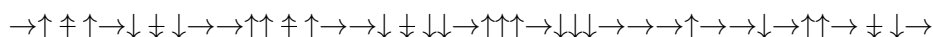
Hinweise: Sie dürfen auch (b) zur Lösung von (a) verwenden. Bitte beachten Sie, dass wir aus der Vorlesung nur wissen, dass die Greibach-Normalform existiert, wir kennen jedoch kein Verfahren, sie zu erzeugen. (Streng genommen wissen wir auch nicht, ob ein solches Verfahren existiert.) Lösungen, die sich auf die GNF berufen, sind wahrscheinlich inkorrekt.

Aufgabe H8.4. (Twice the \uparrow , double the \downarrow)

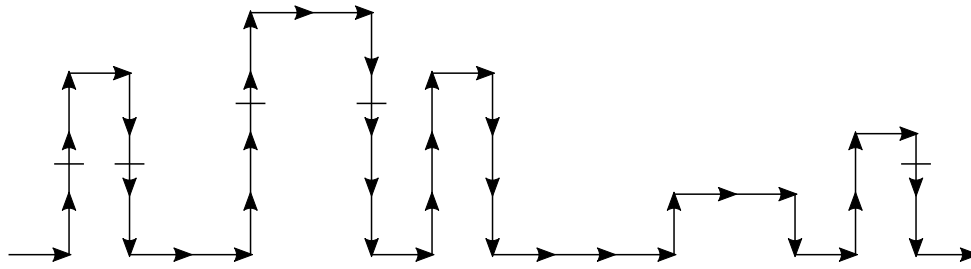
2+3 Punkte

Durch die steigenden Bevölkerungszahlen in jüngerer Vergangenheit wachsen auch die Orte Estlingen und Oberfeld langsam zusammen. Dies stellt die Bebauungsplanerstellungskommission der Gemeindeverwaltung Oberfeld vor Probleme, die (teils kuriosen) traditionellen Estlinger Bauweisen mit den wissenschaftlich fundierten Oberfelder Vorgaben zu vereinen. Nun benötigen sie Ihre Hilfe bei einem besonders kniffligen Fall.

Ähnlich zu Übungsaufgabe Ü5.7 betrachten wir „Skylines“. Sei also $\Sigma := \{\uparrow, \rightarrow, \downarrow, \uparrow, \downarrow\}$ ein Alphabet, wobei wir Wörter aus Σ^* als Linien illustrieren. Beispielsweise stellen wir



über folgende Linie dar:



Die Pfeile \uparrow und \downarrow stellen jeweils Fenster dar. Formal definieren wir *Skylines* induktiv: ε ist eine Skyline, jedes Wort in $\bigcup_{n,m>0} \{\uparrow, \uparrow\}^n \{\rightarrow\}^m \{\downarrow, \downarrow\}^n$ ist eine Skyline, und für Skylines u, v sind $u \rightarrow v$, $u \rightarrow$ und $\rightarrow u$ auch Skylines.

Alle PDAs in dieser Aufgabe akzeptieren über Finalzustände.

(a) Konstruieren Sie einen PDA, der genau die Skylines akzeptiert, die folgenden Einschränkungen erfüllen:

- Alle Gebäude haben ungerade Höhe und Fenster befinden sich nur in ungeraden Stockwerken. (Das linke Haus in obigem Beispiel erfüllt dies.)
- Die Fenster auf gegenüberliegenden Seiten des Hauses müssen übereinstimmen, und alle Häuser müssen mindestens Breite 2 haben.

Hinweise: Sie dürfen die (b) verwenden. Falls Sie dies tun, ist es nicht notwendig, M auszurechnen – M_1 und M_2 genügen. Um Ihre Notation zu vereinfachen, können Sie alternativ das Alphabet $\Sigma' := \{o, r, u, o', u'\}$ benutzen.

Sie sind mittlerweile leicht genervt von „traditionellen“ Estlinger Bräuchen, und beschließen, der Bebauungsplanerstellungskommission ein Werkzeug an die Hand zu geben, mit dem sie sich entsprechende PDAs auch selbst zusammenstellen kann.

Sei $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{N}$ eine Funktion und $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \delta, F)$ ein PDA. Wir sagen, dass M *Signatur* f hat, wenn für alle $(q, c, Z) \in Q \times \Sigma \times \Gamma$ sowohl $|\alpha| = f(c)$ für alle $(q', \alpha) \in \delta(q, c, Z)$ gilt, also auch $|\alpha| = 1$ für alle $(q', \alpha) \in \delta(q, \varepsilon, Z)$. In anderen Worten sorgt jede Transition, die ein Zeichen $c \in \Sigma$ einliest, dafür, dass genau $f(c) - 1$ Zeichen auf den Stapel geschrieben werden, und ε -Transitions dürfen die Größe des Stapels nicht verändern.

(b) Seien M_1, M_2 beliebige PDAs, die beide Signatur f haben. Konstruieren Sie einen PDA M mit $L_F(M) = L_F(M_1) \cap L_F(M_2)$, und begründen Sie, wieso Ihre Konstruktion funktioniert.

Bonusaufgabe H8.5. (Semilineare Mengen)

2+2 Bonuspunkte

Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Wir nennen eine Menge $M \subseteq \mathbb{N}^n$ *linear*, wenn es Vektoren $r, p_1, \dots, p_k \in \mathbb{N}^n$ gibt, sodass

$$M = \{r + \lambda_1 p_1 + \dots + \lambda_k p_k : \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{N}\}$$

Eine Menge S ist *semilinear*, wenn $S = M_1 \cup \dots \cup M_l$, wobei $M_1, \dots, M_l \subseteq \mathbb{N}^n$ lineare Mengen sind, und $l \in \mathbb{N}_{\geq 0}$. Sei nun $n := 2$ und $S \subseteq \mathbb{N}^2$ eine beliebige semilineare Menge.

Zeigen Sie, dass $L := \{w \in \{a, b\}^* : (|w|_a, |w|_b) \in S\}$ kontextfrei ist, indem Sie

- geeignet einen PDA M konstruieren und
- die Korrektheit von M beweisen.