Prof. Javier Esparza
Philipp Czerner, Martin Helfrich

Technische Universität München
Lehrstuhl für Theoretische Informatik

Einführung in die Theoretische Informatik

Sommersemester 2021 – Hausaufgabenblatt 5

Abgabe: 25.05.2021, 12:00 CEST

- Sei $\Phi := \{\{1\}, \{2, 3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}\}$. Nach dem Abgabedatum werden wir für jede Menge $A \in \Phi$ eine zufällige Aufgabe $a \in A$ wählen und korrigieren.

  Update: Die Aufgaben $\{1, 2, 4, 5, 6\}$ werden korrigiert.
- Wenn Sie einen Beweis aufstellen, von dem Sie wissen, das einzelne Schritte problematisch oder unvollständig sind, merken Sie dies bitte in Ihrer Lösung an, damit wir das bei der Korrektur positiv berücksichtigen können.

Aufgabe H5.1. (*Automata Tutor*) 1+1 Punkte

Diese Hausaufgabe wird mit Automata Tutor bearbeitet und abgegeben. Falls Sie es noch nicht bereits gemacht haben, folgen Sie den Schritten in Ü1.2, um ein Konto zu erstellen. Achten Sie darauf, dass Sie sich, wie dort beschrieben, mit Ihrer TUM-Kennung anmelden. Ansonsten können wir Ihnen die Punkte nicht gutschreiben.

Bearbeiten Sie die Hausaufgaben H5.1 (a–b). **Achtung:** Während Sie für die Aufgaben aus dem Übungsblatt beliebig viele Versuche hatten, haben Sie für jede Hausaufgabe nur 5 Versuche. Sie bekommen nur dann einen Punkt, wenn Sie die Aufgabe nach 5 Versuchen vollständig (also mit 10/10 Punkten) gelöst haben.

Aufgabe H5.2. (*Gib mir ein a!*) 0.5+0.5+0.5+0.5 Punkte

Sei $G = (\{S, A, B, C\}, \{a, b\}, P, S)$ eine Grammatik mit den Produktionen

$$S \to AB \mid BC \qquad A \to AA \mid a$$
$$B \to ABA \mid BCB \mid b \qquad C \to ab \mid ba$$

Sind die folgenden Wörter in $L(G)$ enthalten? Falls ja, geben sie einen Syntaxbaum und eine Linksableitung an, falls nein, begründen Sie dies *kurz*.

(a) ε (b) $aababb$ (c) $abaabbba$ (d) $abaabbbba$

Aufgabe H5.3. (*Do you even pump?*) 1+1 Punkte

Sei $\Sigma := \{a, b\}$. Beweisen oder widerlegen Sie, dass die folgenden Sprachen regulär sind. Bitte beachten Sie, dass es beim Beweisen von Regularität regelmäßig nicht genügt, einen entsprechenden Automaten anzugeben – zumindest eine Begründung ist erforderlich. Um zu widerlegen, dass eine Sprache regulär ist, steht Ihnen die Wahl der Beweistechnik (Pumping Lemma, unendlich viele Äquivalenzklassen / Residualsprachen) frei.

Wie üblich schreiben wir $|x|_v := |\{u : x = uvw,\, u, w \in \Sigma^*\}|$ für die Anzahl der Vorkommnisse des Wortes $v \in \Sigma^*$ in $x \in \Sigma^*$, z.B. gilt $|abbbabb|_{bb} = 3$.

(a) $L = \{w \in \Sigma^* : |w|_{aa} = |w|_{bb}\}$

(b) $L = \{w \in \Sigma^* : |w|_{ab} = |w|_{ba}\}$

Aufgabe H5.4. (*no context*) 1+1+2+1 Punkte

Sei $G = (\{S\}, \{a, b\}, P, S)$ eine Grammatik mit den Produktionen $S \to aSbS \mid bSaS \mid \varepsilon$.

(a) Geben Sie eine Sprache L mit $L = L(G)$ an. Definieren Sie L auf möglichst leichte Art und Weise (insbesondere ohne G zu verwenden).

(b) Zeigen Sie, dass jedes Wort $w \in L \setminus \{\varepsilon\}$ sich in $aubv = w$ oder $buav = w$ zerlegen lässt, mit $u, v \in L$.

Achtung: L ist die Sprache, die Sie in (a) angegeben haben, nicht $L(G)$!

(c) Verwenden Sie (b) und beweisen Sie $L(G) = L$.

(d) Ist G mehrdeutig? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe H5.5. (*dada*) 0.5+2+0.5 Punkte

Der kleine Theo ist schon wieder traurig. Er würde gerne Kekse backen, muss aber zuerst herausfinden, ob es ein Wort gibt, das er seinem noch kleineren Neffen beibringen kann. Theo hat sich schon aufgeschrieben, welche Arten von Wörtern sein Neffe bereits gesagt hat. Nun muss er aber ein möglichst kurzes Wort finden, das anders ist. Dazu würde er gerne den kanonischen Minimalautomaten konstruieren, hat aber Riesenprobleme, die Äquivalenzklassen aufzustellen. Sie haben neulich ein Gerücht gehört, dass sich der minimale DFA auch über Residualsprachen konstruieren lässt, und wollen Theo helfen. Zuerst müssen Sie ihm das Konzept einer Residualsprache erklären.

Sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache über Σ. Für ein Wort $w \in \Sigma^*$ definieren wir die *Residualsprache* $L^w := \{u : wu \in L\}$. Die Residualsprache L^w enthält also genau die Wörter in L, die mit w beginnen, wobei das führende w entfernt wurde. Beispielsweise gilt $L(ad^* \mid da^*)^a = L(d^*)$ und $L(ad^* \mid da^*)^{ada} = \emptyset$.

(a) Sei $s := a^*da^* \mid d^*a(ad \mid dd)$. Geben Sie für $L(s)^d$, $L(s)^{da}$, $L(s)^{dad}$ und $L(s)^{dada}$ jeweils einen regulären Ausdruck an.

Hinweis: Es gilt $L^{uv} = (L^u)^v$ für eine beliebige Sprache L und Wörter u, v.

Wie in Übungsaufgabe Ü5.6 (a) gezeigt hängt die Residualsprache L^w nicht davon ab, welchen Repräsentanten w wir aus $[w]_{\equiv_L}$ wählen. Um den kanonischen Minimalautomaten einer Sprache L aufzuschreiben, können wir als Zustände anstatt der Äquivalenzklassen von L also auch die Residualsprachen von L verwenden.

Sei nun $\Sigma := \{a, d\}$ und $r := d(ad \mid da)^* \mid d^*a^* \mid a(a \mid d)^*$. Wir suchen das kürzeste Wort $w \notin L(r)$. Dazu wollen wir den minimalen DFA für $L(r)$ erstellen.

(b) Konstruieren Sie den kanonischen Minimalautomat für $L(r)$. Beschriften Sie hierbei einen Zustand $[w]_{\equiv_{L(r)}}$ nicht mit dessen Äquivalenzklasse, sondern mit einem regulären Ausdruck für die Residualsprache $L(r)^w$.

(c) Finden Sie alle kürzesten Wörter $w \notin L(r)$.

Bonusaufgabe H5.6. (*Irrational irregulär*) 1+3 Bonuspunkte

Sei $\Sigma := \{\mathtt{0}, ..., \mathtt{9}\}$. Für Wörter $u, v \in \Sigma^*$ bezeichnen wir mit $(u.v)_{10} := (u)_{10} + 10^{-|v|} \cdot (v)_{10}$ den Wert eines Dezimalbruchs, es gilt also z.B. $(\mathtt{1.75})_{10} = \frac{7}{4}$.

(a) Zeigen Sie, dass $L_1 := \{w \in \Sigma^* : (\mathtt{0}.w)_{10} < \frac{1}{7}\}$ regulär ist.

(b) Beweisen Sie, dass $L_2 := \{w \in \Sigma^* : (\mathtt{0}.w)_{10} < \frac{1}{\sqrt{2}}\}$ nicht regulär ist, indem sie unendlich viele Äquivalenzklassen (oder Residualsprachen, s. Übungsaufgabe Ü5.6) von $\equiv_{L_2}$ identifizieren. (Sie müssen nicht angeben, welche Elemente in den Äquivalenzklassen / Residualsprachen enthalten sind.)