Prof. Javier Esparza
Philipp Czerner, Martin Helfrich

Technische Universität München
Lehrstuhl für Theoretische Informatik

Einführung in die Theoretische Informatik

Sommersemester 2021 – Hausaufgabenblatt 3

Abgabe: 10.05.2021, 12:00 CEST

- Beachten Sie die Abgabemodalitäten auf der Vorlesungswebsite!
- Sei $\Phi := \{\{1\}, \{2\}, \{3, 4\}, \{5\}\}$. Nach dem Abgabedatum werden wir für jede Menge $A \in \Phi$ eine zufällige Aufgabe $a \in A$ wählen und korrigieren.
- Es werden diese Aufgaben korrigiert: H3.1, H3.2, H3.3, H3.5
- Wenn Sie einen Beweis aufstellen, von dem Sie wissen, das einzelne Schritte problematisch oder unvollständig sind, merken Sie dies bitte in Ihrer Lösung an, damit wir das bei der Korrektur positiv berücksichtigen können.

Aufgabe H3.1. (*ein paar as, dann ein b…*) 1+1+1 Punkte

Geben sie an, zu welchen regulären Ausdrücken die gleiche Sprache gehört. Bestimmen Sie außerdem für jede Sprache, die Sie so identifizieren, ein Wort, das nur in dieser Sprache liegen. Die sechs regulären Ausdrücke erzeugen drei unterschiedliche Sprachen.

Beispiel: Sie stellen fest, dass (1,2), (3,4) und (5,6) die gleiche Sprache erzeugen. Dann müssen Sie ein Wort in $L_{1,2} \setminus (L_{3,4} \cup L_{5,6})$ finden, eines in $L_{3,4} \setminus (L_{1,2} \cup L_{5,6})$, und eines in $L_{5,6} \setminus (L_{1,2} \cup L_{3,4})$.

Wie üblich, schreiben wir r^+ anstelle von rr^*, für einen regulären Ausdruck r.

(1) $b \mid a^+(baa^+)^*(b|bab)$

(2) $(a \mid ab)^+ \mid a(b^*a\emptyset)^+$

(3) $(a^+b)^*$

(4) $(aba \mid a)^*b$

(5) $a(a^*ba)^*a^*(b \mid \epsilon)$

(6) $\emptyset^* \mid a(a \mid ba)^*b$

Aufgabe H3.2. (*Matriririririkelnummern*) 2+2+1 Punkte

An der Technischen Hochschule Estlingen-Oberfeld werden Matrikelnummern nach einem kuriosen System vergeben. Matrikelnummern haben die Form `#36442` – eine Raute gefolgt von einer Zahl. Die Quersumme der Zahl muss hierbei eine Primzahl sein, eine alte estlinger Tradition. Nun hält der technische Wandel auch nicht vor Estlingen-Oberfeld ein, und der Rektor versucht verzweifelt, einen endlichen Automaten zu finden, der korrekte Matrikelnummern akzeptiert.

(a) Sei $\Sigma := \{0, ..., 9\}$, und $L := \{\#\}\{w \in \Sigma^* : \sum_{i\geq 1} w_i \text{ prim}\}$, also die Sprache der Dezimalzahlen, deren Quersumme eine Primzahl ist, mit einer Raute vorneweg. Beweisen Sie, dass L nicht regulär ist.

Der Rektor hat sich in der Zwischenzeit einen neuen Ansatz überlegt. Die Primzahlquersumme bräuchte man eigentlich nur in der traditionellen estlinger Form, für neue Studenten müsse man es nicht so genau nehmen – `##1234` sei ja auch eine prima Matrikelnummer (für nicht-Estlinger).

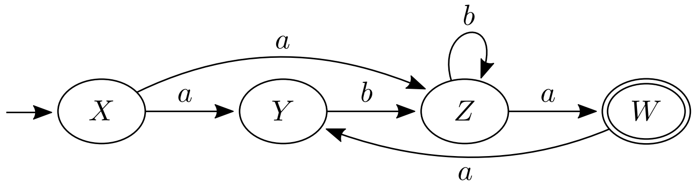
(b) Zeigen Sie, dass die Sprache $L' := L \cup \{\#^i w : i \neq 1, w \in \Sigma^*\}$ die Eigenschaft des Pumping-Lemmas erfüllt.

(c) Beweisen Sie, dass L' dennoch nicht regulär ist, z.B. indem Sie Abschlusseigenschaften regulärer Sprachen verwenden.

Aufgabe H3.3. (*NFA zu RA*) 3+1 Punkte

(a) Konvertieren Sie den folgenden NFA M zu einem regulären Ausdruck, indem Sie ein geeignetes Gleichungssystem aufstellen und dieses lösen.

(b) Geben Sie einen äquivalenten NFA an, der 4 Zustände aber nur 5 Transitionen hat.



Aufgabe H3.4. (*Spieglein, Spieglein, an der Wand...*) 2+1+1 Punkte

Sei $\Sigma := \{a, b\}$. Wie üblich definieren wir w^R als die Spiegelung des Wortes w. Für eine beliebige Sprache L definieren wir nun $L^R := \{w^R : w \in L\}$.

(a) Zeigen Sie, dass L^R regulär ist, wenn L regulär ist.

(b) Sei M ein NFA mit n Zuständen. Konstruieren Sie einen NFA für $L(M)^R$ mit höchstens $n + 1$ Zuständen.

(c) Sei r ein regulärer Ausdruck. Konstruieren Sie einen regulären Ausdruck r' für $L(r)^R$ mit Länge $|r|$.

Hinweise: Sie müssen die Teilaufgaben nicht in der Reihenfolge lösen, in der sie gestellt wurden. Bei der Länge eines regulären Ausdrucks zählen wir Klammern nicht, die Länge von $(ab \mid \boldsymbol{\epsilon})^*$ wäre also 5. Bei (c) bietet es sich an, ähnlich zur strukturellen Induktion, ein rekursives Verfahren anzugeben.

Bonusaufgabe H3.5. (*Nach den Sternen greifen*) 3 Bonuspunkte

Sei L eine reguläre Sprache. Zeigen Sie, dass $L' := \{w : \{w\}^* \subseteq L\}$ regulär ist.